史福贵◎顾问指导

# M—模糊化拟阵的公理体系初步

王　岚◎著

黑龙江人民出版社

M—模糊化拟阵的公理体系初步

责任编辑：王裕江　装帧设计：王　刚



ISBN 978-7-207-08558-0

定价：12.10元

牡丹江师范学院学科建设基金资助
获得国家自然科学基金(10971242)支持

# M-模糊化拟阵的公理体系初步

王 岚 著
史福贵 顾问指导

黑龙江人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

M－模糊化拟阵的公理体系初步/王岚著.
—哈尔滨:黑龙江人民出版社,2009.12
ISBN 978－7－207－08558－0

Ⅰ.M…　Ⅱ.王…　Ⅲ.拟阵—模拟及理论
Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第235022号

责任编辑：王裕江
装帧设计：王　刚

M－模糊化拟阵的公理体系初步
M－Mohuhua Nizhen de Gongli Tixi Chubu
王　岚　著
史福贵　顾问指导

出版发行　黑龙江人民出版社
通讯地址　哈尔滨市南岗区宣庆小区1号楼
邮　　编　150008
网　　址　www.longpress.com
电子邮箱　hljrmcbs@yeah.net
印　　刷　黑龙江神龙联合制版印务有限责任公司
开　　本　880×1230毫米　1/32
印　　张　4.875
字　　数　126 000
版　　次　2009年12月第1版　2009年12月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－207－08558－0/O·28
定　　价　12.10元

(如发现本书有印制质量问题,印刷厂负责调换)
本社常年法律顾问:北京市大成律师事务所哈尔滨分所律师赵学利、赵景波

# 摘 要

本书是在 $M$ 为完全分配格的情况下, 对已有的 $M$- 模糊化拟阵理论进行归纳及深入的研究, 研究了 $M$- 模糊化拟阵理论的一些基本概念和性质, 如: $M$- 模糊化基集族, $M$- 模糊化圈集族, $M$- 模糊化秩函数, $M$- 模糊化闭包算子 (内部算子), $M$- 模糊化闭集族 (开集族). 试图建立 $M$- 模糊化拟阵理论的框架结构.

本书共分五章.

**第一章**为绪论. 对所研究问题的背景知识加以介绍, 并概述了 $M$- 模糊化拟阵的发展进程, 总结了本文的主要工作, 展望了所研究课题的进一步发展方向. 同时列出了本文所需要的主要概念和结论.

**第二章**为 $M$- 模糊化拟阵及 $M$- 模糊化秩函数. 我们指出了一个 $M$- 模糊化拟阵可以借助于它的几种水平截拟阵族来刻画，研究了模糊化秩函数的一些性质，证明了任意子集在 $M$- 模糊化拟阵的截拟阵中的秩函数就是其在 $M$- 模糊化秩函数下像的截集.

**第三章**为 $M$- 模糊化相关集族. 给出了 $M$- 模糊化相关集族的概念, 证明了 $M$- 模糊化相关集族和 $M$- 模糊化独立集族可以相互诱导. 最后给出了一些 $M$ 模糊化拟阵的实例.

**第四章**为 $M$- 模糊化闭包算子、$M$- 模糊化闭集族、$M$- 模糊化内部算子和 $M$- 模糊化开集族. 通过 $M$- 模糊化拟阵的四类截拟阵分别引入四类 $M$- 模糊化闭包算子和 $M$- 模糊化闭集族, 研究了各种 $M$- 模糊化闭包算子和 $M$- 模糊化闭集族的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系. 证明了它们和 $M$- 模糊化拟阵之间是一一对应的. 在此基础上引入了 $M$- 模糊化闭包算子和 $M$- 模糊化闭集族的对偶概念 —$M$- 模糊化内部算子和 $M$- 模糊化开集族，同样地研究了它们的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系和一一对应关系.

**第五章**为 $M$- 模糊化基集族和 $M$- 模糊化圈集族. 我们将拟阵

理论中的基和圈概念推广到 $M$- 模糊化拟阵理论中, 分别定义了四类 $M$- 模糊化基集族和 $M$- 模糊化圈集族, 除讨论了它们的性质外, 还研究了它们和 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系. 证明了它们和 $M$- 模糊化拟阵之间是一一对应的.

# 序 言

自 1965 年 L.A. Zadeh 创立了模糊集 [90] 以来，模糊数学以不可想象的速度高速地发展，目前它已经成为许多理论及应用学科的基础工具. 在理论方面, 以模糊集理论为基础的模糊代数、模糊分析, 模糊拓扑、模糊测度、模糊逻辑、模糊图等学科已经形成. 在应用方面, 模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策和预测、模糊规划、模糊控制、模糊信息处理等理论和方法已在工农业、医学、军事、计算机科学、信息科学、系统科学、工程技术等多个领域中发挥着重要作用, 并获得了巨大的经济效益.

作为矩阵和图的推广，拟阵理论已经被广泛的应用到组合优化、整数规划、计算机、网络流、信息安全等多个应用领域. 但是拟阵模糊化的理论研究相对于其它模糊数学分支来说还不够成熟.

最近，史福贵教授建立了 $M$- 模糊化拟阵理论, 这里 $M$ 是一个完全分配格. 本书的目的就是对这种模糊化拟阵理论做一个初步的介绍，许多结果都是作者和史教授新近得到而尚未发表的。

本书内容共分五章.

第一章为绪论和预备知识.

在第二章中，指出了一个 $M$- 模糊化拟阵可以借助于它的几种水平截拟阵族来刻画，讨论了模糊化拟阵秩函数的一些性质.

在第三章中，引入了 $M$- 模糊化相关集族的概念，并证明了 $M$- 模糊化相关集族和 $M$- 模糊化独立集族可以相互诱导.

在第四章中，通过 $M$- 模糊化拟阵的四类截拟阵分别引入四类 $M$- 模糊化闭包算子和 $M$- 模糊化闭集族, 研究了各种 $M$- 模糊化闭包算子和 $M$- 模糊化闭集族的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系. 对偶地，也引入了 $M$- 模糊化内部算子和 $M$- 模糊化开集族，同样研究了它们的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系.

在第五章中，将拟阵理论中的基和圈概念推广到 $M$- 模糊化拟阵理论中，分别定义了四类 $M$- 模糊化基集族和 $M$- 模糊化圈集族，除讨论了它们的性质外，还研究了它们和 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系.

此书第二章是 $M$- 模糊化拟阵的基础核心部分，这些内容是史教授在其文章《A new approach to the fuzzification of matroids》中首次提出的. 也正是这篇文章奠定了 $M$- 模糊化拟阵理论的研究基础. 本书的其他部分是作者在攻读博士期间与导师史福贵教授合作完成的，这些结果来自于王岚的博士论文. 本书中的每一章，每一节的选题均来自于史教授，每一个定义确定，每一个定理的证明均得到了史教授的指导和帮助，书中的许多问题的攻坚工作也都是由史教授完成的. 所以作者在此要特别的感谢我的老师史福贵教授多年来的培养和无私的帮助. 正是史教授辛勤的努力和无私的奉献才使得此书得以出版. 在此，衷心地向我的导师史福贵教授致以最诚挚的谢意!

本书的出版曾得到国家自然科学基金 (10971242)、牡丹江师范学院学科建设专项经费的资助，同时还得到了牡丹江师范学院博士科研启动基金（MSB200903）和青年学术骨干基金（G200904）的支持. 牡丹江师范学院付军龙教授、张金学教授、杨春文教授、梁中贤教授、张瑛教授、邓晨光教授、韩卫平研究员等同志对本书的编写和出版给予了关心和帮助，在此作者表示衷心的感谢.

作者在攻读博士学位期间曾与姚卫、李扉、黄韩亮、李润祥、信秀、黄春娥、周采丽及韩杰等博士在学术上有过诸多讨论和交流，得到了很多启迪与帮助. 在此一并表示感谢!

另外感谢我的父母、爱人，一直以来对我的关心、支持和无私奉献，他们是我安心从事科研工作的坚强后盾. 更要感谢我的爱子，他对我的信任与依靠是我前进的无穷动力.

最后，向所有关心和帮助过我的老师、同事、家人与朋友致以诚

挚的谢意!

由于作者学识有限，加之时间紧迫，书中难免存在错误及不足之处，望读者提出批评指正.

作者王岚于牡丹江师范学院

2009 年 11 月

# 目　录

# 第一章 绪 论

## 1.1 综 述

拟阵(Matriod)理论是一门新发展起来的数学分支. Whitney 于 1935 年在"关于线性相关的抽象性质"一文中第一次提出了拟阵的概念，并叙述了拟阵的公理系统. 1942 年，Rado 提出了有关拟阵的一些定理. Birkhoff、Maclane 和 Dilworth 等人研究了拟阵集合方面的问题以及拟阵与格的关系等等. 20 世纪 60 年代，Tutte 发表"关于拟阵的演讲"一文后，拟阵理论得到了迅速发展. 特别是 Edmonds 和 Minty 等人把图论的算法推广到拟阵，使拟阵在组合优化、整数规划、网络流及电网络理论中有了广泛应用. Welsh 研究了拟阵的结构，并于 1976 年撰写了关于拟阵理论的专著《Matroid Theory》.

拟阵的一个重要应用就是在组合最优化中. 其背景如下：设 $E$ 是一个非空有限集合, $I$ 是 $E$ 的满足性质 [60]：

(1)若$B \in I$,且$A \subseteq B$,则$A \in I$;

(2)若$A, B \in I$,且$|A| < |B|$,则存在一个元$e \in B - A$使得$A \cup e \in I$

的非空子集族, 则序对 $(E, I)$ 就构成一个拟阵 $\mathcal{M}$. 令一个映射 $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ 是一个权函数, 扩张其为 $\omega : 2^E \to \mathbb{R}^+$ 使得 $\forall A \in 2^E$, 有 $\omega(A) = \sum_{e \in A} \omega(e)$. 我们需要找 $I$ 的一个元素 $A_0$ 使得 $\omega(A_0) = \max\{\omega(A) : A \in I\}$, 这就是最大权独立集问题. 这个问

题的有效解决方法就是所谓的 greedy 算法, 其过程如下 [43]:

步骤 1 对 $E(\mathcal{M})$ 中的元素重新标号, 使得

$$E(\mathcal{M}) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\},$$

并且这些元素满足条件:

$$\omega(e_1) \geq \omega(e_2) \geq \cdots \geq \omega(e_h) \geq 0 \geq \omega(e_{h+1}) \geq \cdots \geq \omega(e_m).$$

步骤 2 将输出量 $A_0$ 的初始值设置为 $\emptyset$.

步骤 3 对 $i = 1$ 到 $h$ 逐一验证, 若 $A_0 \cup e_i \in I$, 则把 $A_0$ 换成 $A_0 \cup e_i$. 则最后的输出量 $A_0$ 就是我们想要的具有最大权的独立集, 也就是找到具有条件 $\omega(A_0) = \max\{\omega(A) : A \in I\}$ 的最大独立集.

在实际问题中, 权函数 $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ 的值未必是一个具体的已知的实数, 它的值可能是不确定的, 也许我们只能确定它在某个区间范围内, 甚至它仅是一个模糊区间或者模糊数.

考虑到模糊集合的更一般情况，关于权函数的形式可分为下面四种情况:

(1) $\omega : 2^E \to \mathbb{R}^+$;

(2) $\omega : 2^E \to \mathbb{R}^+([0,1])$;

(3) $\omega : [0,1]^E \to \mathbb{R}^+$;

(4) $\omega : [0,1]^E \to \mathbb{R}^+([0,1])$.

显然 (1) 是 (2) 和 (3) 的特殊情形，而 (2) 和 (3) 又是 (4) 的特殊情形。对于情形 (4)，为了解决上述权函数对应的最优化问题，普通拟阵就有其局限性了. 那么我们需要的系统应该是怎样的一种结构呢?

1988 年，以情形 (3) 为背景，R. Goetschel 和 W. Voxman 等引入了拟阵的一种模糊化处理方法，他们的处理方法使用的

是模糊集支承集的势，它是一个分明数。随后又提出了模糊拟阵的基、模糊圈、模糊秩函数、并研究了模糊 greedy 算法 [31, 32, 33, 34, 35, 37]. 其模糊拟阵的定义如下

**定义**[30] 设 $E$ 是一个非空有限集合, $\mathcal{T}$ 是集合 $E$ 上的所有模糊集族的一个非空子集, $\mathcal{T}$ 被叫做一个模糊独立集族, 如果它满足下面两个条件：

**(1)** 如果 $\nu \in \mathcal{T}$, 且 $\mu \leq \nu$, 那么 $\mu \in \mathcal{T}$.

**(2)** 如果 $\nu, \mu \in \mathcal{T}$ 且 $|\text{supp}\mu| < |\text{supp}\nu|$, 那么存在 $\tau \in \mathcal{T}$ 使得

(a) $\mu < \tau \leq \mu \vee \nu$;

(b) $m(\tau) \geq \min\{m(\mu), m(\nu)\}$.

当 $\mathcal{T}$ 是集合 $E$ 上的一个模糊独立集族时, 则称这个偶对 $\mathcal{M} = (E, \mathcal{T})$ 是一个模糊拟阵.

为后续叙述方便我们也称其为 Goetschel-Voxman 模糊拟阵.

如此定义的 Goetschel-Voxman 模糊拟阵的模糊独立集族的每个元素的 $r$ 水平截集的全体 $\mathcal{T}_r = \{C_r(\mu) : \mu \in \mathcal{T}, r \in (0,1]\}$(这里 $C_r(\mu) = \{e \in E : \mu(e) \geq r\}$) 构成一个拟阵的独立集族, 称 $(E, \mathcal{T}_r)$ 为 Goetschel-Voxman 模糊拟阵的水平拟阵.

在 Goetschel-Voxman 模糊拟阵中没有考虑模糊集本身的模糊势，从这一点来看，其结论并不理想。在模糊代数中, 一个模糊化代数结构的水平应该是相应的分明代数结构, 这是被人们广泛接受的一个共识. 正是基于这种思想，Novak 在文 [58] 中定义一个模糊集系统 $(E, \mathcal{I})$ 是模糊拟拟阵 (fuzzy pre-matroid), 当且仅当它的每个水平集系统 $(E, \mathcal{I}_r)(r \in (0,1])$ 都是分明拟阵.

基于权函数为 (2) 的情形, 我国学者史福贵教授在文 [66, 67, 77] 中提出了一种新的拟阵模糊化方法，首次提出了 $M$- 模

糊化拟阵的概念，并证明了当 $M=[0,1]$ 时，它等价于闭的遗传的 Novak 模糊拟拟阵. 在文 [66] 中, 史教授给出 $M$- 模糊化拟阵的定义如下

**定义**[66] 设 $E$ 是一个非空有限集合, 映射 $\mathcal{I}:2^E\to M$ 是集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化独立集族 ($M$-fuzzifying family of independent subsets) , 如果 $\mathcal{I}$ 满足以下三个条件：

**(FI1)** $\mathcal{I}(\emptyset)=\top$.

**(FI2)** 如果$A,B\in 2^E$, 且 $B\subseteq A$, 那么 $\mathcal{I}(A)\leqslant\mathcal{I}(B)$.

**(FI3)** 如果 $A,B\in 2^E$ 且 $|A|<|B|$, 那么

$$\bigvee_{e\in B-A}\mathcal{I}(A\cup\{e\})\geqslant\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B).$$

称序对 $(E,\mathcal{I})$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵 ($M$-fuzzifying matroid), 其中 $\mathcal{I}(A)$ 是集合 $A\in 2^E$ 的 $M$- 模糊化独立度 (the degree of $M$-fuzzifying independence).

$M$- 模糊化拟阵中的 $\mathcal{I}$ 是一个满足条件**(FI1)**–**(FI3)**的映射 $\mathcal{I}:2^E\to M$, 它是一个 $M$- 模糊集. 这样，在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 中, 集合 $E$ 的每一个子集在某种程度上都有其独立性.

文 [66] 还证明了，对于一个非空有限集合 $E$ 和一个映射 $\mathcal{I}:2^E\to M$ 来说, $(E,\mathcal{I})$ 构成一个 $M$- 模糊化拟阵的充要条件是每个水平 $((E,\mathcal{I}_{[a]})(a\in J(M)$ 或 $(E,\mathcal{I}^{(a)})(a\in P(M)))$ 都是拟阵. 这与模糊代数中模糊群、模糊环、模糊域以及模糊向量空间的情形相协调.

尤其重要的是, 史福贵教授还推广了模糊基数，引入了 $M$- 模糊自然数 ($M$-fuzzy natural number) 和 $M$- 模糊集的基数

(势), 从而引入了 $M$- 模糊化秩函数 ($M$-fuzzifying rank function) 的定义, 并且证明了 $M$- 模糊化拟阵和 $M$- 模糊化秩函数之间存在一一对应的关系. 这些充分说明 $M$- 模糊化拟阵是一种比较合理的拟阵模糊化处理方法.

基于权函数 (4) 的情形, 史教授将文 [66] 的思想作了进一步的推广, 于文 [67] 中又提出了 $(L,M)$- 模糊拟阵 ($(L,M)$-fuzzy matroid) 理论. 它是以一般的格 $L$ 取代 $M$- 模糊化拟阵中的 $\{0,1\}$, 把 $E$ 和满足下列三个条件的映射 $\mathcal{I}: L^E \to M$ 构成的序对 $(E,\mathcal{I})$ 称作是一个 $(L,M)$- 模糊拟阵 ($(L,M)$-fuzzy matroid).

**(LMFI1)** $\mathcal{I}(\chi_\emptyset) = \top_M$;

**(LMFI2)** $A, B \in L^E$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{I}(A) \geqslant \mathcal{I}(B)$;

**(LMFI3)** $A, B \in L^E$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 令 $b = |B|(n) \nleqslant |A|(n)$, 有

$$\bigvee_{e \in F(A,B)} \mathcal{I}\left((b \wedge A_{[b]}) \cup e_b\right) \geqslant \mathcal{I}(A) \wedge \mathcal{I}(B).$$

其中, $F(A,B) = \{e \in E : b \leqslant B(e), b \nleqslant A(e)\}$.

显然一个 $(\{0,1\},M)$- 模糊拟阵就是一个 $M$- 模糊化拟阵. 类似于 $L$- 模糊拓扑的情形, 一个 $(L,\{0,1\})$- 模糊拟阵被叫做一个 $L$- 拟阵. 而 $(\{0,1\},\{0,1\})$- 模糊拟阵就是分明拟阵.

对于一个非空有限集合 $E$ 和一个映射 $\mathcal{I}: L^E \to M$ 来说, $(E,\mathcal{I})$ 构成一个 $(L,M)$- 模糊拟阵的充要条件是每个水平 ($(E,\mathcal{I}_{[a]})(a \in J(M)$ 或 $(E,\mathcal{I}^{(a)})(a \in P(M))$) 都是 $L$- 拟阵.

此外文 [67] 还得到了几个重要的实际例子, 那就是: 给定一个模糊向量空间 $(U,\mu)$ 和 $U$ 的一个有限子集 $E$, 可以得到一个 $[0,1]$- 拟阵和一个 $[0,1]$- 模糊化拟阵. 给定一个图 $(V,E)$ 和它的一个类型 $(V,\nu)$ 的模糊子图, 同样可以得到一个 $[0,1]$- 拟

阵和一个 [0,1]- 模糊化拟阵. 这些例子充分说明了这种 (L,M)-模糊拟阵理论是有重要意义的工作.

基于上述工作, 本书的研究重点将放在 $M$- 模糊化拟阵的公理体系的刻画上, 就像拟阵的公理体系一样, 试图从 $M$- 模糊化秩函数及 $M$- 模糊化相关集族, $M$- 模糊化闭包算子, $M$-模糊化闭集族, $M$- 模糊化内部算子, $M$- 模糊化开集族, $M$- 模糊化基集族和 $M$- 模糊化圈集族等基础概念出发刻画 $M$- 模糊化拟阵.

今后除了要考虑它的各种等价公理与性质以外, 我们还将继续深入研究, 试图发现 $M$- 模糊化拟阵的更多实际例子和应用, 建立这一新的研究方向的基本框架, 为模糊优化提供一种新的理论和方法.

## 1.2 预备知识及符号说明

为了全书的完整性, 这一节给出一些基本的概念、结论和一些常用的符号. 首先, 给出模糊集方面的一些知识, 这在后续的章节中是经常要用到的.

在此我们特别声明. 为了将来进一步研究 $(L,M)$- 模糊拟阵, 保持符号的统一性, 我们在此, 将文 [66] 中 $L$- 模糊自然数、$L$- 模糊化拟阵和 $L$- 模糊化秩函数中的完全分配格 $L$ 的符号 “$L$” 用符号 “$M$” 替换, 分别称其为 $M$- 模糊自然数、$M$-模糊化拟阵和 $M$- 模糊化秩函数, 符号 $L$ 和 $M$ 的意义一致, 仅为了与 $(L,M)$-中的符号 $M$ 保持一致. 并且在文中为了符号的

一致性, 我们还将人们熟知的 $L$- 模糊集中格符号 "$L$", 在本文中也用 "$M$" 替换, 称其为 $M$- 模糊集, 仅为符号替换.

在后续内容中, 一个格 $M$ 在无特殊说明时是指一个具有逆序对合对应 " $'$ " 的完全分配格. 若 $X$ 是一个非空集合, 映射 $A: X \to M$ 称为 $M$- 模糊集 (或 $M$-fuzzy 集), 其全体记为 $M^X$. $M$ 中的最大元和最小元分别记为 $\top$ 和 $\bot$. $M^X$ 从 $M$ 中点式地诱导出格运算 "$\leq, \vee, \wedge$" 使得 $(M^X, \leq, \vee, \wedge)$ 仍为完全分配格. 书中对分明子集与其特征函数不加区别. 对于格 $M$ 中的元素 $a$, 若满足条件 $a \geq b \wedge c$ 就有 $a \geq b$ 或 $a \geq c$ 成立, 则称元素 $a$ 为格 $M$ 中的素元, 称元素 $a$ 的补元为余素元. 所有非单位的素元的全体记作 $P(M)$, 所有非零的余素元的全体记作 $J(M)$.

格 $M$ 上一个二元关系 $\prec$ 定义如下: 对于任意的 $a, b \in M$, 若 $a \prec b$ 当且仅当对于任意的满足条件 $b \leq \sup D$ 的集合 $D \subseteq M$ 总存在 $d \in D$ 使得 $a \leq d$ 成立, 我们称 $\{a \in M : a \prec b\}$ 为元素 $b$ 的极小集, 记作 $\beta(b)$, 并且记 $\beta^*(b) = \beta(b) \cap J(M)$. 另外, 对格上的二元关系 $\prec^{op}$ 定义如下: 对于任意元素 $a, b \in M$, 若 $a \prec^{op} b$ 当且仅当对于任意的满足条件 $b \geq \inf D$ 的集合 $D \subseteq M$ 总存在 $c \in D$ 使得 $a \geq c$ 成立, 我们称 $\{a \in M : a \prec^{op} b\}$ 为元素 $b$ 的极大集, 记作 $\alpha(b)$, 并且记 $\alpha^*(b) = \alpha(b) \cap P(M)$ . 在一个完全分配格 (completely distributive lattice )$M$ 中, 对于每一个元素 $b \in M$, 都存在 $\alpha(b)$ 和 $\beta(b)$ , 并且 $b = \bigvee \beta(b) = \bigvee \beta^*(b) = \bigwedge \alpha(b) = \bigwedge \alpha^*(b)$ (见 [74]). 我们规定 $\beta(\bot) = \emptyset$ 和 $\alpha(\top) = \emptyset$.

一般在不引起歧义的情况下, 为简单起见常常将 $A \cup \{x\}$ 和 $A - \{x\}$ 分别简记为 $A \cup x$ 和 $A - x$.

**定理** 1.2.1 ([74, 75]). 设 $M$ 是一个完全分配格, 并且有

$$\{a_i \mid i \in \Omega\} \subseteq M.$$

则有以下结论

(1) $\alpha\left(\bigwedge_{i\in\Omega} a_i\right) = \bigcup_{i\in\Omega} \alpha(a_i)$.

(2) $\beta\left(\bigvee_{i\in\Omega} a_i\right) = \bigcup_{i\in\Omega} \beta(a_i)$.

上述定理说明极大映射是一个交并映射, 而极小映射是一个保并映射.

**注** 1.2.2. 在文 [63, 64, 65] 中的定义中的格 $L$ 均用符号 $M$ 替换意义不变.

**定义** 1.2.3 ([63, 64, 65]). 设 $A \in M^X$ 并且 $a \in M$. $M$- 模糊集 $A$ 的四种截集定义如下

$$A_{[a]} = \{x \in X \mid A(x) \geqslant a\}, \qquad A_{(a)} = \{x \in X \mid a \in \beta(A(x))\},$$
$$A^{[a]} = \{x \in X \mid a \notin \alpha(A(x))\}, \qquad A^{(a)} = \{x \in X \mid A(x) \nleqslant a\}.$$

从上面的定义中可以看出当 $a \in \beta(b)$ 有 $A_{[b]} \subseteq A_{(a)} \subseteq A_{[a]}$, 当 $a \in \alpha(b)$ 有 $A^{[a]} \subseteq A^{(b)} \subseteq A^{[b]}$. 当 $M = [0,1]$, 显然 $A_{[a]} = A^{[a]}$, 并且 $A_{(a)} = A^{(a)}$.

对于 $a \in M$ 和 $D \subseteq X$, 我们定义两个特殊的 $M$- 模糊集 $a \wedge D$ 和 $a \vee D$ 如下:

$$(a \wedge D)(x) = \begin{cases} a, & x \in D. \\ 0, & x \notin D. \end{cases} \qquad (a \vee D)(x) = \begin{cases} 1, & x \in D. \\ a, & x \notin D. \end{cases}$$

从文献 [63, 64, 65] 中我们还可以看到以下结论成立.

**定理** 1.2.4. 设 $A$ 是非空集合 $X$ 上的 $M$- 模糊集, 则有以下结论:

(1) $A = \bigvee_{a\in M}(a\wedge A_{[a]}) = \bigvee_{a\in J(M)}(a\wedge A_{[a]})$
$= \bigvee_{a\in M}(a\wedge A_{(a)}) = \bigvee_{a\in J(M)}(a\wedge A_{(a)}).$

(2) $A = \bigwedge_{a\in M}(a\vee A^{[a]}) = \bigwedge_{a\in P(M)}(a\vee A^{[a]})$
$= \bigwedge_{a\in M}(a\vee A^{(a)}) = \bigwedge_{a\in P(M)}(a\vee A^{(a)}).$

(3) $\forall a\in M,\ A_{[a]} = \bigcap_{b\in\beta(a)} A_{[b]} = \bigcap_{b\in\beta(a)} A_{(b)}.$

(4) $\forall a\in M,\ A_{(a)} = \bigcup_{a\in\beta(b)} A_{[b]} = \bigcup_{a\in\beta(b)} A_{(b)}.$

(5) $\forall a\in M,\ A^{[a]} = \bigcap_{a\in\alpha(b)} A^{[b]} = \bigcap_{a\in\alpha(b)} A^{(b)}.$

(6) $\forall a\in M,\ A^{(a)} = \bigcup_{b\in\alpha(a)} A^{[b]} = \bigcup_{b\in\alpha(a)} A^{(b)}.$

(7) $\forall a\in M,\ A_{[a]} = \bigcap_{a\not\leq b} A^{[b]} = \bigcap_{a\not\leq b} A^{(b)}.$

(8) $\forall a\in M,\ A^{(a)} = \bigcup_{b\not\leq a} A_{[b]} = \bigcup_{b\not\leq a} A_{(b)}.$

**定理** 1.2.5 ([63]). 设 $\{A_i \mid i\in\Omega\}$ 是非空集合 $X$ 上的一族 $M$-模糊集, 则有以下结论:

(1) $\left(\bigvee_{i\in\Omega} A_i\right)_{(a)} = \bigcup_{i\in\Omega}(A_i)_{(a)}.$ (2) $\left(\bigvee_{i\in\Omega} A_i\right)^{(a)} = \bigcup_{i\in\Omega}(A_i)^{(a)}.$

(3) $\left(\bigwedge_{i\in\Omega} A_i\right)_{[a]} = \bigcap_{i\in\Omega}(A_i)_{[a]}.$ (4) $\left(\bigwedge_{i\in\Omega} A_i\right)^{[a]} = \bigcap_{i\in\Omega}(A_i)^{[a]}.$

**定义** 1.2.6 ([63, 64, 65]). 设 $H: M\to\mathcal{P}(X)$ 是映射,

(1) 若 $a\in\alpha(b)\Rightarrow H(a)\subseteq H(b)$, 则称映射 $H$ 是集合 $X$ 上的一个 $M_\alpha$- 集合套.

(2) 若 $a\in\beta(b)\Rightarrow H(b)\subseteq H(a)$, 则称映射 $H$ 是集合 $X$ 上的一个 $M_\beta$- 集合套.

**(3)** 若 $a \in \alpha^*(b) \Rightarrow H(a) \subseteq H(b)$, 则称映射 $H$ 是集合 $X$ 上的一个素元集合套.

**(4)** 若 $a \in \beta^*(b) \Rightarrow H(b) \subseteq H(a)$, 则称映射 $H$ 是集合 $X$ 上的余素元集合套.

我们定义在集合 $X$ 上的 $M_\alpha$- 集合套的全体, $M_\beta$- 集合套的全体, 素元集合套的全体, 分子集合套的全体分别地记作: $\mathcal{U}_{M_\alpha}(X), \mathcal{U}_{M_\beta}(X), \mathcal{U}_P(X)$ 和 $\mathcal{U}_J(X)$. 很容易可以验证在点态序下 $\mathcal{U}_{M_\alpha}(X), \mathcal{U}_{M_\beta}(X), \mathcal{U}_P(X)$ 和 $\mathcal{U}_J(X)$ 都构成完全分配格.

**定理** 1.2.7 ([63]). 对于映射 $H \in \mathcal{U}_{M_\alpha}(X)$, 设

$$f(H) = \bigwedge_{a \in M} (a \vee H(a)).$$

则以下结论成立.

**(1)** $\forall a \in M$, $f(H)^{(a)} \subseteq H(a) \subseteq f(H)^{[a]}$.

**(2)** $\forall a \in M$, $f(H)^{[a]} = \bigcap_{a \in \alpha(b)} H(b)$.

**(3)** $\forall a \in M$, $f(H)^{(a)} = \bigcup_{b \in \alpha(a)} H(b)$.

**(4)** 映射 $f$ 是 $\mathcal{U}_{M_\alpha}(X)$ 到 $M^X$ 的同态满射.

**定理** 1.2.8 ([63]). 对于映射 $H \in \mathcal{U}_{M_\beta}(X)$, 设

$$g(H) = \bigvee_{a \in M} (a \wedge H(a)).$$

则以下结论成立.

**(1)** $\forall a \in M$, $f(H)_{(a)} \subseteq H(a) \subseteq f(H)_{[a]}$.

**(2)** $\forall a \in M$, $f(H)_{[a]} = \bigcap_{b \in \beta(a)} H(b)$.

**(3)** $\forall a \in M$, $f(H)_{(a)} = \bigcup_{a \in \beta(b)} H(b)$.

**(4)** 映射 $g$ 是 $\mathcal{U}_{M_\beta}(X)$ 到 $M^X$ 上的同态满射.

**定理** 1.2.9 ([64]). 对于映射 $H \in \mathcal{U}_P(X)$, 设

$$f(H) = \bigwedge_{a \in P(M)} (a \vee H(a)).$$

则以下结论成立.

(1) $\forall a \in P(M)$, $f(H)^{(a)} \subseteq H(a) \subseteq f(H)^{[a]}$.

(2) $\forall a \in P(M)$, $f(H)^{[a]} = \bigcap_{a \in \alpha^*(b)} H(b)$.

(3) $\forall a \in P(M)$, $f(H)^{(a)} = \bigcup_{b \in \alpha^*(a)} H(b)$.

(4) 映射 $f$ 是 $\mathcal{U}_P(X)$ 到 $M^X$ 上的同态满射.

**定理** 1.2.10 ([64]). 对于映射 $H \in \mathcal{U}_M(X)$, 设

$$g(H) = \bigvee_{a \in J(M)} (a \wedge H(a)).$$

则以下结论成立.

(1) $\forall a \in J(M)$, $f(H)_{(a)} \subseteq H(a) \subseteq f(H)_{[a]}$.

(2) $\forall a \in J(M)$, $f(H)_{[a]} = \bigcap_{b \in \beta^*(a)} H(b)$.

(3) $\forall a \in J(M)$, $f(H)_{(a)} = \bigcup_{a \in \beta^*(b)} H(b)$.

(4) $g$ 是 $\mathcal{U}_J(X)$ 到 $M^X$ 上的同态满射.

下面我们再介绍一下 $M$- 模糊自然数的一些相关结论, 这些结论均来自于文 [66].

**定义** 1.2.11. 设 $\mathbb{N}$ 是自然数集合. 若一个反序映射 (antitone map) $\lambda : \mathbb{N} \to M$ 满足

$$\lambda(0) = \top, \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \lambda(n) = \bot,$$

则称映射 $\lambda:\mathbb{N}\to M$ 为一个 $M$- 模糊自然数（$M$-fuzzy natural number），所有 $M$- 模糊自然数的全体记作 $\mathbb{N}(M)$.

以下定理显然成立.

**定理** 1.2.12. 设 $\lambda,\mu\in\mathbb{N}(M)$, 定义 $M$- 模糊数的序关系 "$\leq$" 如下

$$\lambda\leqslant\mu \text{ 当且仅当 } \lambda(n)\leqslant\mu(n), \text{ 其中 } n\in\mathbb{N}.$$

则 $(\mathbb{N}(M),\leq)$ 构成一个格, 其中, $\lambda\vee\mu$ 和 $\lambda\wedge\mu$ 分别定义如下.

$$(\lambda\vee\mu)(n)=\lambda(n)\vee\mu(n),\quad (\lambda\wedge\mu)(n)=\lambda(n)\wedge\mu(n).$$

**定义** 1.2.13. 设 $\lambda,\mu\in\mathbb{N}(M)$, 在 $M$- 模糊自然数集（$\mathbb{N}(M)$）上定义加法（addition）"$+$"和乘法（multiplication）"$\times$"如下: 对于任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$(\lambda+\mu)(n)=\bigvee_{k+l=n}(\lambda(k)\wedge\mu(l)),$$

$$(\lambda\times\mu)(n)=\bigvee_{k\times l=n}(\lambda(k)\wedge\mu(l))$$

以下结论成立.

**定理** 1.2.14. 对于任意 $m\in\mathbb{N}$, 定义特殊的 $M$- 模糊自然数 $\underline{m}\in\mathbb{N}(M)$ 如下

$$\underline{m}(t)=\begin{cases}\top, & \text{if } t\leqslant m.\\ \bot, & \text{if } t\geqslant m+1.\end{cases}$$

则对于任意 $\lambda\in\mathbb{N}(M)$, 有

$$\underline{0}+\lambda=\lambda,\ \underline{0}\cdot\lambda=\underline{0},\ \underline{1}\cdot\lambda=\lambda.$$

**注** 1.2.15. 如果对 $m$ 和 $\underline{m}$ 不加以区分, 则可以将自然数 $\mathbb{N}$ 看作是一类特殊的 $M$- 模糊自然数. 在下文中, 我们对 $m$ 和 $\underline{m}$ 不加以区分.

关于 $M$- 模糊自然数还有以下结论成立.

**定理** 1.2.16. 设 $\lambda \in \mathbb{N}(M)$. 则有

(1) 对于任意 $a \in \beta(\top)$, $\lambda_{(a)}$ 是一个自然数.

(2) 对于任意 $a \in M \backslash \{\perp\}$, $\lambda_{[a]}$ 是一个自然数.

(3) 对于任意 $a \in M \backslash \{\top\}$, $\lambda^{(a)}$ 是一个自然数.

(4) 对于任意 $a \in M \backslash \{\top\}$, $\lambda^{[a]}$ 是一个自然数.

**定理** 1.2.17. 对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{N}(M)$ 和 $a \in M$, 有

(1) $(\lambda + \mu)_{(a)} \subseteq \lambda_{(a)} + \mu_{(a)} \subseteq \lambda_{[a]} + \mu_{[a]} \subseteq (\lambda + \mu)_{[a]}$.

(2) $(\lambda + \mu)^{(a)} \subseteq \lambda^{(a)} + \mu^{(a)} \subseteq \lambda^{[a]} + \mu^{[a]} \subseteq (\lambda + \mu)^{[a]}$.

(3) $(\lambda \times \mu)_{(a)} \subseteq \lambda_{(a)} \times \mu_{(a)} \subseteq \lambda_{[a]} \times \mu_{[a]} \subseteq (\lambda \times \mu)_{[a]}$.

(4) $(\lambda \times \mu)^{(a)} \subseteq \lambda^{(a)} \times \mu^{(a)} \subseteq \lambda^{[a]} \times \mu^{[a]} \subseteq (\lambda \times \mu)^{[a]}$.

**定理** 1.2.18. 对于任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{N}(M)$ 和 $a \in P(M)$, 有

(1) $(\lambda + \mu)^{(a)} = \lambda^{(a)} + \mu^{(a)}$.

(2) $(\lambda \times \mu)^{(a)} = \lambda^{(a)} \times \mu^{(a)}$.

**定义** 1.2.19. 设 $A$ 是一个 $M$- 模糊集, 如果 $A^{(0)}$ 是有限的, 则称 $A$ 是一个有限的.

**定义** 1.2.20. 设 $A$ 是一个有限的 $M$- 模糊集, 映射 $|A| : \mathbb{N} \to M$ 被称为 $A$ 的基数, 如果 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A|(n) = \bigvee \{a \in M \,|\, |A_{[a]}| \geqslant n\}$.

**定理** 1.2.21. 对于集合 $X$ 上的一个有限的 $M$- 模糊集 $A$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|A|(n) = \bigvee \{a \in M \,|\, |A_{(a)}| \geqslant n\}.$$

**定理** 1.2.22. 设 $A \in M^X$ 是一个 $M$- 模糊集, 并且

$$a \in M \backslash \{\bot\},$$

则有

$$|A|_{(a)} \leqslant |A_{(a)}| \leqslant |A_{[a]}| \leqslant |A|_{[a]}.$$

**定理** 1.2.23. 设 $A \in M^X$ 是一个 $M$- 模糊集, 并且

$$a \in M \backslash \{\top\},$$

则有

$$|A|^{(a)} \leqslant |A^{(a)}| \leqslant |A^{[a]}| \leqslant |A|^{[a]}.$$

特别地, 当 $a \in P(M)$ 有 $|A|^{(a)} = |A^{(a)}|$ .

**推论** 1.2.24. 设 $A \in M^X$ 是一个 $M$- 模糊集, 并且 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|A|(n) = \bigwedge \left\{ a \in M \middle| |A^{[a]}| < n \right\} = \bigwedge \left\{ a \in M \middle| |A^{(a)}| < n \right\}.$$

# 第二章 $M$- 模糊化拟阵及 $M$- 模糊化秩函数

在这一章中，我们将引入 $M$- 模糊化拟阵及 $M$- 模糊化秩函数的定义及部分性质，并在此基础上，得到 $M$- 模糊化拟阵及 $M$- 模糊化秩函数的一些新的刻画.

## 2.1 $M$- 模糊化拟阵

这节中自定义 2.1.1 到定理 2.1.4 的内容均来自于文 [66].

**定义** 2.1.1. 设 $E$ 是一个非空有限集合. 映射 $\mathcal{I}: 2^E \to [0,1]$ 被称为集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化独立集族, 如果 $\mathcal{I}$ 满足以下三个条件:

**(FI1)** $\mathcal{I}(\emptyset) = 1$.

**(FI2)** $A, B \in 2^E$, $A \supseteq B \Rightarrow \mathcal{I}(A) \leqslant \mathcal{I}(B)$.

**(FI3)** 如果 $A, B \in 2^E$, $|A| < |B|$, 那么

$$\bigvee_{e \in B-A} \mathcal{I}(A \cup \{e\}) \geqslant \mathcal{I}(A) \wedge \mathcal{I}(B).$$

当 $\mathcal{I}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化独立集族时, 称 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵 ($M$-fuzzifying matroids). 若 $A \in 2^E$, 则称 $\mathcal{I}(A)$ 是集合 $A$ 的 $M$- 模糊化独立度.

下面这个定理给出了 $M$- 模糊化拟阵可以由其两类截拟阵族刻画.

**定理** 2.1.2. 设 $E$ 是一个非空有限集, 并且 $\mathcal{I}: 2^E \to M$ 为一个映射, 则以下条件是等价的:

**(1)** $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

**(2)** $\forall a \in J(M)$, $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 是一个拟阵.

**(3)** $\forall a \in P(M)$, $(E,\mathcal{I}^{(a)})$ 是一个拟阵.

**注** 2.1.3. 在下面定理 2.1.4、2.2.9 及推论 2.2.10 中, 我们总假定完全分配格 $M$ 满足条件

$$(\mathbf{BETA}): \text{对于任意的} a,b \in M, \quad \beta(a \wedge b) = \beta(a) \cap \beta(b).$$

**定理** 2.1.4. 设 $E$ 是一个有限集, $\mathcal{I}: 2^E \to M$ 是一映射. 则 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 当且仅当对任意的 $a \in \beta(\top)$, $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 是拟阵.

**证明** 必要性. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 由 $\mathcal{I}(\emptyset) = \top$, 我们可以推得对任意的 $a \in \beta(\top)$, 有 $\emptyset \in \mathcal{I}_{(a)}$ .

设 $A,B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 如果 $B \in \mathcal{I}_{(a)}$, 那么 $a \in \beta(\mathcal{I}(B))$, 由 $\mathcal{I}(A) \geqslant \mathcal{I}(B)$ 我们可以得到 $a \in \beta(\mathcal{I}(A))$, 即 $A \in \mathcal{I}_{(a)}$.

令 $A,B \in \mathcal{I}_{(a)}$ 且 $|B| > |A|$, 由 $\bigvee_{e\in B-A} \mathcal{I}(A \vee \{e\}) \geq \mathcal{I}(A) \wedge \mathcal{I}(B)$, 可知

$$\begin{aligned} a \in \; & \beta(\mathcal{I}(A)) \cap \beta(\mathcal{I}(B)) = \beta(\mathcal{I}(A) \wedge \mathcal{I}(B)) \\ \subseteq \; & \beta\left(\bigvee_{e\in B-A} \mathcal{I}(A \vee \{e\})\right) = \bigcup_{e\in B-A} \beta(\mathcal{I}(A \vee \{e\})). \end{aligned}$$

这证明了存在 $e \in B - A$ 使得 $A \vee \{e\} \in \mathcal{I}_{(a)}$.

从而 $\forall a\in\beta(\top)$, $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 是拟阵.

充分性. $\forall a\in\beta(\top)$, 设 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 是拟阵. 下面我们证明 $\mathcal{I}$ 满足条件**(FI1)**, **(FI2)**及**(FI3)**.

**(FI1)** $\forall a\in\beta(\top)$, 由 $\emptyset\in\mathcal{I}_{(a)}$, 可推得 $a\in\beta(\mathcal{I}(\emptyset))$. 因此 $\mathcal{I}(\emptyset)=\top$.

**(FI2)** 设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$, 令 $\mathcal{I}(B)=b$. 则对于任意的 $a\in\beta(b)$, 有 $B\in\mathcal{I}_{(a)}$. 因为 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 是一个拟阵, 我们可以证明 $A\in\mathcal{I}_{(a)}$. 表明了当 $a\in\beta(b)$ 时, 有 $a\in\beta(\mathcal{I}(A))$. 从而 $\mathcal{I}(B)=b=\bigvee\beta(b)\leqslant\bigvee\beta(\mathcal{I}(A))=\mathcal{I}(A)$.

**(FI3)** 假设 $A,B\in 2^E$, $|B|>|A|$. 若 $a\in\beta(\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B))$, 则 $a\in\beta(\mathcal{I}(A))$ 且 $a\in\beta(\mathcal{I}(B))$, 所以 $A,B\in\mathcal{I}_{(a)}$. 由于 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 是一个拟阵, 所以存在 $e\in B-A$ 使得 $A\vee\{e\}\in\mathcal{I}_{(a)}$. 这说明 $a\in\beta(\mathcal{I}(A\vee\{e\}))\subseteq\beta\left(\bigvee_{e\in B-A}\mathcal{I}(A\vee\{e\})\right)$. 故

$$\bigvee_{e\in B-A}\mathcal{I}(A\vee\{e\})\geqslant\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B).$$

□

**注** 2.1.5. 在下面定理 2.1.6、2.2.13 及推论 2.2.14 中我们总要求完全分配格 $M$ 满足条件

$$\textbf{(ALPHA)}:\text{对于任意的}a,b\in M,\quad \alpha(a\vee b)=\alpha(a)\cap\alpha(b).$$

**定理** 2.1.6. 设 $E$ 是一个有限集, $\mathcal{I}:2^E\to M$ 是一映射. 则 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 当且仅当对任意的 $a\in\alpha(\bot)$, $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 是一个拟阵.

**证明** 必要性. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 首先, 对任意的 $a\in\alpha(\bot)$, 由 $\mathcal{I}(\emptyset)=\top$ 可知 $a\notin\emptyset=\alpha(\top)=\alpha(\mathcal{I}(\emptyset))$, 所以 $\emptyset\in\mathcal{I}^{[a]}$.

其次, 设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$, 如果 $B\in\mathcal{I}^{[a]}$, 那么 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(B))$, 由于 $\mathcal{I}(A)\geqslant\mathcal{I}(B)$, 所以 $\alpha(\mathcal{I}(A))\subseteq\alpha(\mathcal{I}(B))$, 故有 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(A))$, 即, $A\in\mathcal{I}^{[a]}$.

另外, 设 $A,B\in\mathcal{I}^{[a]}$ 且 $|B|>|A|$, 由

$$\bigvee_{e\in B-A}\mathcal{I}(A\vee\{e\})\geq\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B).$$

我们可以证明

$$a\quad\notin\quad\alpha(\mathcal{I}(A))\cup\alpha(\mathcal{I}(B))\quad=\quad\alpha(\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B)),$$

于是

$$a\quad\notin\quad\alpha\left(\bigvee_{e\in B-A}\mathcal{I}(A\cup e)\right)\quad=\quad\bigcap_{e\in B-A}\alpha\left(\mathcal{I}(A\cup e)\right).$$

这证明存在 $e\in B-A$ 使得 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(A\cup e))$, 即 $A\cup e\in\mathcal{I}^{[a]}$.

从而 $\forall a\in\beta(\top)$, $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 是拟阵.

充分性. 设 $\forall a\in\alpha(\bot)$, $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 都是拟阵. 要想证明 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 下面我们只需要证明 $\mathcal{I}$ 满足条件**(FI1)**, **(FI2)** 和**(FI3)**.

**(FI1)** $\forall a\in\alpha(\bot)$, 由 $\emptyset\in\mathcal{I}^{[a]}$ 可得 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(\emptyset))$. 从而 $\mathcal{I}(\emptyset)=\top$.

**(FI2)** 设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$, 令 $\mathcal{I}(B)=b$. 则对于任意的 $a\notin\alpha(b)$ 有 $B\in\mathcal{I}^{[a]}$. 因为 $\mathcal{I}^{[a]}$ 是拟阵, 所以 $A\in\mathcal{I}^{[a]}$, 也就是 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(A))$, 于是 $b\leq\mathcal{I}(A)$. 从而

$$\mathcal{I}(B)=b=\bigwedge\alpha(b)\leqslant\bigwedge\alpha(\mathcal{I}(A))=\mathcal{I}(A).$$

**(FI3)** 设 $A,B\in 2^E$, $|B|>|A|$. 如果 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B))$, 那么 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(A))$ 并且 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(B))$, 所以 $A,B\in\mathcal{I}^{[a]}$. 因为 $\mathcal{I}^{[a]}$ 是一个

拟阵, 所以存在 $e \in B - A$ 使得 $A \cup e \in \mathcal{I}^{[a]}$, 故

$$a \notin \alpha(\mathcal{I}(A \cup e)) \supseteq \alpha\left(\bigvee_{e \in B-A} \mathcal{I}(A \cup e)\right)$$

从而 $\bigvee_{e \in B-A} \mathcal{I}(A \cup e) \geqslant \mathcal{I}(A) \wedge \mathcal{I}(B)$. □

由模糊集及其截集的性质和 $M$- 模糊化拟阵的定义可以直接推得.

**定理** 2.1.7. 设 $\{(E, \mathcal{I}(a)) \mid a \in P(M)\}$ 是一族拟阵.

(1) 若 $b \in \alpha(a) \Rightarrow \mathcal{I}(b) \subseteq \mathcal{I}(a)$, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}^{(a)} \subseteq \mathcal{I}(a) \subseteq \mathcal{I}^{[a]}$.

(2) 若 $\forall a \in P(M)$, 有 $\mathcal{I}(a) = \bigcup\{\mathcal{I}(b) \mid b \in \alpha(a)\}$, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}^{(a)} = \mathcal{I}(a)$.

(3) 若 $\forall b \in P(M)$, 有 $\mathcal{I}(b) = \bigcap\{\mathcal{I}(a) \mid b \in \alpha(a)\}$, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}^{[a]} = \mathcal{I}(a)$.

**定理** 2.1.8. 设 $\{(E, \mathcal{I}(a)) \mid a \in M\}$ 是一族拟阵, 若对于任意 $a, b \in M$, 都有 $\beta(a \wedge b) = \beta(a) \cap \beta(b)$. 则

(1) 若 $a \in \beta(b) \Rightarrow \mathcal{I}(b) \subseteq \mathcal{I}(a)$, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}_{(a)} \subseteq \mathcal{I}(a) \subseteq \mathcal{I}_{[a]}$.

(2) 若 $\forall a \in \beta(\top)$, 有 $\mathcal{I}(a) = \bigcup\{\mathcal{I}(b) \mid a \in \beta(b)\}$ , 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}_{(a)} = \mathcal{I}(a)$.

(3) 若 $\forall a \in J(M)$, 有 $\mathcal{I}(a) = \bigcap\{\mathcal{I}(b) \mid b \in \beta(a)\}$, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}_{[a]} = \mathcal{I}(a)$.

两个模糊化拟阵 $\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ 和 $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ 是同构的, 记做 $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$, 如果存在一个双射 $f : E_1 \longrightarrow E_2$ 使得 $\forall A \subseteq E_1, \mathcal{I}_1(A) = \mathcal{I}_2(f(A))$.

## 2.2 $M$- 模糊化秩函数

秩函数在拟阵理论中扮演着十分重要的角色, 在拟阵理论中许多概念及定义的刻画都是由秩函数来实现的. 在本节中, 借助于 $M$- 模糊集的四种截集, 给出了 $M$- 模糊化秩函数的水平刻画, 得到它的四种水平截集都是截拟阵的秩函数这一结论. 在此基础上我们还研究了 $M$- 模糊化秩函数的一些性质, 推广了 $M$- 模糊化秩函数的判定定理. 本节中, 从定义 2.2.1 到推论 2.2.7 均来自于文 [66].

**定义** 2.2.1. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 并且映射 $R_{\mathcal{I}}: 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 定义如下

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n) = \bigvee \{\mathcal{I}(B) \mid B \subseteq A, |B| \geqslant n\},$$

则称 $R_{\mathcal{I}}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数 ($M$-fuzzifying rank function). 称 $R_{\mathcal{I}}(A)$ 为 $A \in 2^E$ 的 $M$- 模糊化秩.

**定理** 2.2.2. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $R_{\mathcal{I}}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. $\forall a \in P(M)$, 用 $R^a$ 表示 $(E,\mathcal{I}^{(a)})$ 的秩函数. 当 $A \in 2^E$ 时, 有 $R^a(A) = R_{\mathcal{I}}(A)^{(a)}$.

**证明** . 由 $R_{\mathcal{I}}(A)$ 的定义, 有:

$$\begin{aligned} n \in R_{\mathcal{I}}(A)^{(a)} &\Leftrightarrow R_{\mathcal{I}}(A)(n) \not\leq a \\ &\Leftrightarrow \exists B \subseteq A \text{ 使得 } \mathcal{I}(B) \not\leq a \text{ 且 } |B| \geqslant n \\ &\Leftrightarrow \exists B \subseteq A \text{ 使得 } B \in \mathcal{I}^{(a)} \text{ 且 } |B| \geqslant n \\ &\Leftrightarrow n \leq \max\{|B| : B \subseteq A,\ B \in \mathcal{I}^{(a)}\} = R^a(A). \end{aligned}$$

故 $R^a(A) = R_{\mathcal{I}}(A)^{(a)}$. □

**推论** 2.2.3. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. $\forall a \in P(M)$, 用 $R^a$ 表示 $(E,\mathcal{I}^{(a)})$ 的秩函数, 有

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n) = \bigwedge\{a \in P(M) \mid R^a(A) < n\},\ \ R_{\mathcal{I}}(A) = \bigwedge_{a\in P(M)} \{a \vee R^a(A)\}.$$

**定理** 2.2.4. 设 $R_{\mathcal{I}} : 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 是 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数, 则以下性质成立:

**(FR1)** $A \in 2^E$, 有 $\underline{0} \leqslant R_{\mathcal{I}}(A) \leqslant \underline{|A|}$.

**(FR2)** $A, B \in 2^E$, 有 $A \subseteq B \Rightarrow R_{\mathcal{I}}(A) \leqslant R_{\mathcal{I}}(B)$.

**(FR3)** $A, B \in 2^E$, 有 $R_{\mathcal{I}}(A) + R_{\mathcal{I}}(B) \geqslant R_{\mathcal{I}}(A \cap B) + R_{\mathcal{I}}(A \cup B)$.

**证明** (FR1) 显然 $\underline{0} \leqslant R_{\mathcal{I}}(A)$. 又, $\forall n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > |A|$, 有

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n) = \bigvee\{\mathcal{I}(C) : C \subseteq A, |C| \geqslant n\} = 0$$

所以 $R_{\mathcal{I}}(A) \leqslant \underline{|A|}$.

(FR2) 设 $A, B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 则有 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{I}}(A)(n) &= \bigvee\{\mathcal{I}(C) : C \subseteq A, |C| \geqslant n\} \\ &\leqslant \bigvee\{\mathcal{I}(C) : C \subseteq B, |C| \geqslant n\} \\ &= R_{\mathcal{I}}(B)(n). \end{aligned}$$

从而证明了 $R_{\mathcal{I}}(A) \leqslant R_{\mathcal{I}}(B)$.

(FR3) 由定理 1.2.18 和拟阵的秩函数性质, $\forall a \in P(M)$,

$$\begin{aligned} (R_{\mathcal{I}}(A) + R_{\mathcal{I}}(B))^{(a)} &= R_{\mathcal{I}}(A)^{(a)} + R_{\mathcal{I}}(B)^{(a)} \\ &\geqslant R_{\mathcal{I}}(A \cap B)^{(a)} + R_{\mathcal{I}}(A \cup B)^{(a)} \\ &= (R_{\mathcal{I}}(A \cap B) + R_{\mathcal{I}}(A \cup B))^{(a)} \end{aligned}$$

从而有 $R_{\mathcal{I}}(A) + R_{\mathcal{I}}(B) \geqslant R_{\mathcal{I}}(A \cap B) + R_{\mathcal{I}}(A \cup B)$. □

**引理** 2.2.5. 设映射 $R: 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 满足条件**(FR1)**,**(FR2)**和**(FR3)**. $\forall a \in P(M)$, 令 $R^a: 2^E \to \mathbb{N}$ 满足 $R^a(A) = R(A)^{(a)}$. 则 $R^a$ 满足**(R1)**, **(R2)**和**(R3)**,

**(R1)** $A \in 2^E$, 有 $0 \leqslant R^a(A) \leqslant |A|$.

**(R2)** $A, B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 有 $R^a(A) \leqslant R^a(B)$.

**(R3)** $A, B \in 2^E$, 有 $R^a(A) + R^a(B) \geqslant R^a(A \cap B) + R^a(A \cup B)$.

因此存在一个拟阵 $(E, \mathcal{I}^a)$ 使得 $R^a$ 是 $(E, \mathcal{I}^a)$ 的秩函数.

**定理** 2.2.6. 设映射 $R: 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 满足条件**(FR1)**,**(FR2)**和**(FR3)**. 定义 $\mathcal{I}: 2^E \to M$ 满足 $\mathcal{I}_R(A) = R(A)(|A|)$. 则 $(E, \mathcal{I}_R)$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 并且 $R$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数.

**证明** (FI1) $\mathcal{I}_R(\emptyset) = R(\emptyset)(0) = \top$.

(FI2) 设 $A, B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_R(A) &= R(A)(|A|) \\
&= \bigwedge \{a \in P(M) : R(A)(|A|) \leqslant a\} \\
&= \bigwedge \left\{a \in P(M) : R(A)^{(a)} < |A|\right\} \\
&= \bigwedge \{a \in P(M) : R^a(A) < |A|\} \\
&\geqslant \bigwedge \{a \in P(M) : R^a(B) < |B|\} \\
&= \bigwedge \left\{a \in P(M) : R(B)^{(a)} < |B|\right\} \\
&= \bigwedge \{a \in P(M) : R(B)(|B|) \leqslant a\} \quad = \mathcal{I}_R(B).
\end{aligned}$$

(FI3) 设 $|A| < |B|$ 且 $\mathcal{I}_R(A) \wedge \mathcal{I}_R(B) \neq 0$. 下面我们将要证明, 对于任意的 $e \in B - A$ 有

$$\bigvee_{e \in B - A} \mathcal{I}_R(A \cup \{e\}) \geqslant \mathcal{I}_R(A) \wedge \mathcal{I}_R(B).$$

如果对于任意的 $e\in B-A$, 有 $\bigvee\limits_{e\in B-A}\mathcal{I}_R(A\cup\{e\})\not\geqslant\mathcal{I}_R(A)\wedge\mathcal{I}_R(B)$, 则对于任意的 $e\in B-A$, 都有 $\mathcal{I}_R(A\cup\{e\})\not\geqslant\mathcal{I}_R(A)\wedge\mathcal{I}_R(B)$. 那么由 (FI2), 存在着一个素元 $a\in P(M)$ 使得

$$R^a(A\cup\{e\})<|A\cup\{e\}|,\quad R^a(A)=|A|,\ \text{且}\ R^a(B)=|B|.$$

因此 $R^a(A\cup\{e\})=R^a(A)$. 故 $|A|=R^a(A)=R^a(B)=|B|$, 与 $|A|<|B|$ 矛盾.

现在我们证明 $R=R_{\mathcal{I}_R}$. 显然 $\forall A\in 2^E$ 且 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{I}_R}(A)(n)&=\bigvee\{\mathcal{I}_R(B):n\leqslant|B|,B\subseteq A\}\\&=\bigvee\{R(B)(|B|):n\leqslant|B|,B\subseteq A\}\\&\leqslant\bigvee\{R(A)(|B|):n\leqslant|B|,B\subseteq A\}\\&\leqslant R(A)(n).\end{aligned}$$

则证明了 $R_{\mathcal{I}_R}(A)\leqslant R(A)$.

另外, $\forall a\in P(M)$, 如果 $R(A)(n)\not\leqslant a$, 那么

$$R^a(A)=R(A)^{(a)}\geqslant n.$$

由

$$\begin{aligned}n\leqslant R^a(A)&=\max\{|B|:B\subseteq A,\ R^a(B)\geqslant|B|\}\\&=\max\{|B|:B\subseteq A,\ R(B)(|B|)\not\leqslant a\}\\&=\max\{|B|:B\subseteq A,\ \mathcal{I}_R(B)\not\leqslant a\}.\end{aligned}$$

从而存在着 $B\subseteq A$ 使得 $n\leqslant|B|$ 且 $\mathcal{I}_R(B)\not\leqslant a$. 故 $R_{\mathcal{I}_R}(A)(n)\not\leqslant a$. 所以 $R(A)\leqslant R_{\mathcal{I}_R}(A)$. □

**推论** 2.2.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $R_{\mathcal{I}}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. 当 $A\in 2^E$ 且 $\forall n\in\mathbb{N}$ 时, 有

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n)=\bigvee\{R_{\mathcal{I}}(B)(|B|)\mid n\leqslant|B|,B\subseteq A\}.$$

从以上结论可以看出, 一个 $M$- 模糊化拟阵可以用 $M$- 模糊化秩函数刻画, 这两者间可以建立起一一对应关系.

为了更好的研究 $M$- 模糊化拟阵, 我们进一步探讨 $M$- 模糊化秩函数的一些性质. 下面先给出一个 $M$- 模糊自然数的性质, 为后面的秩函数性质证明做准备.

**引理** 2.2.8. 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{N}(M)$ , 则有以下结论:

(1) 若 $M$ 满足条件 (**BETA**), 则

$$\forall a \in \beta(\top), (\lambda + \mu)_{(a)} = \lambda_{(a)} + \mu_{(a)}.$$

(2) $\forall a \in J(M)$, $(\lambda + \mu)_{[a]} = \lambda_{[a]} + \mu_{[a]}$.

(3) 若 $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 则

$$\forall a \in \alpha(\perp), (\lambda + \mu)^{[a]} = \lambda^{[a]} + \mu^{[a]}.$$

(4) $\forall a \in P(M)$, $(\lambda + \mu)^{(a)} = \lambda^{(a)} + \mu^{(a)}$.

**证明** (1) 由定理 1.2.17, 我们只需要证明

$$(\lambda + \mu)_{(a)} \supseteq \lambda_{(a)} + \mu_{(a)}.$$

设 $n \in \lambda_{(a)} + \mu_{(a)}$. 则有 $k, l \in \mathbb{N}$ 满足 $n = k + l$ 使得 $k \in \lambda_{(a)}$ 并且 $l \in \mu_{(a)}$. 也就有 $a \in \beta(\lambda(k))$ 和 $a \in \beta(\mu(l))$, 故

$$a \in \beta(\lambda(k)) \cap \beta(\mu(l)) = \beta(\lambda(k) \wedge \mu(l)) \subseteq \beta\left(\bigvee_{k+l=n} (\lambda(k) \wedge \mu(l))\right) = \beta((\lambda+\mu)(n)).$$

即 $n \in (\lambda + \mu)_{(a)}$. 所以 $(\lambda + \mu)_{(a)} = \lambda_{(a)} + \mu_{(a)}$.

(2) 我们只需要证明 $(\lambda + \mu)_{[a]} \subseteq \lambda_{[a]} + \mu_{[a]}$. 设 $n \in (\lambda + \mu)_{[a]}$. 则 $(\lambda + \mu)(n) = \bigvee\limits_{k+l=n} (\lambda(k) \wedge \mu(l)) \geqslant a$. 因为 $a \in J(M)$, 所以存在

$k, l \in \mathbb{N}$ 满足 $n = k + l$, 使得 $\lambda(k) \wedge \mu(l) \geqslant a$. 故 $k \in \lambda_{[a]}$ 和 $l \in \mu_{[a]}$, 即, $n \in \lambda_{[a]} + \mu_{[a]}$. 因此 $(\lambda + \mu)_{[a]} = \lambda_{[a]} + \mu_{[a]}$.

(3) 的证明方法同上, 且 (4) 是定理 1.2.18 中的结论 (1). □

**定理** 2.2.9. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $R_{\mathcal{I}}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. 当 $a \in \beta(\top)$ 且 $A \in 2^E$ 时, 我们可以证得 $R_{(a)}(A) = (R_{\mathcal{I}}(A))_{(a)}$, 其中 $R_{(a)}$ 是截拟阵 $(E, \mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数.

**证明** 由 $R_{\mathcal{I}}(A)$ 的定义可得,

$$
\begin{aligned}
n \notin (R_{\mathcal{I}}(A))_{(a)} \quad &\Leftrightarrow \quad a \notin \beta(R_{\mathcal{I}}(A)(n)) \\
&\Leftrightarrow \quad a \notin \beta\left(\bigvee_{\substack{B \subseteq A \\ |B| \geqslant n}} \mathcal{I}(B)\right) = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ |B| \geqslant n}} \beta(\mathcal{I}(B)) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall B \subseteq A \text{ 且 } |B| \geqslant n,\ a \notin \beta(\mathcal{I}(B)) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall B \subseteq A \text{ 且 } B \in \mathcal{I}_{(a)},\ |B| < n \\
&\Leftrightarrow \quad \max\left\{|B| : B \subseteq A \text{ 并且 } B \in \mathcal{I}_{(a)}\right\} < n \\
&\Leftrightarrow \quad n \not\leq R_{(a)}(A).
\end{aligned}
$$

从而证明了 $R_{(a)}(A) = (R(A))_{(a)}$. □

由定理 1.2.4, 引理 2.2.8 和定理 2.2.9 我们可得下面这个推论.

**推论** 2.2.10. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 并且映射 $R_{\mathcal{I}} : 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数, $\forall a \in \beta(\top)$, $R_{(a)}$ 是截拟阵 $(E, \mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数, 有

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n) = \bigvee \left\{a \in \beta(\top) : n \leq R_{(a)}(A)\right\}, \tag{2.2.1}$$

$$R_{\mathcal{I}}(A) = \bigvee_{a \in \beta(\top)} \left\{a \wedge R_{(a)}(A)\right\}. \tag{2.2.2}$$

**定理** 2.2.11. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 并且映射 $R_{\mathcal{I}}: 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. 当 $a \in J(M)$ 且 $A \in 2^E$ 时, 有 $R_{[a]}(A) = (R_{\mathcal{I}}(A))_{[a]}$, 其中 $R_{[a]}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数.

**证明** 由

$$\begin{aligned}(R_{\mathcal{I}}(A))_{[a]} < n \quad &\Leftrightarrow \quad R_{\mathcal{I}}(A)(n) \ngeqslant a \\ &\Leftrightarrow \quad \forall B \subseteq A \text{ 有 } |B| \geqslant n,\ \mathcal{I}(B) \ngeqslant a \\ &\Leftrightarrow \quad \forall B \subseteq A \text{ 有 } |B| \geqslant n,\ B \notin \mathcal{I}_{[a]} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall B \subseteq A \text{ 有 } B \in \mathcal{I}_{[a]},\ |B| < n \\ &\Leftrightarrow \quad \max\{|B| : B \subseteq A \text{ 并且 } B \in \mathcal{I}_{[a]}\} < n \\ &\Leftrightarrow \quad R_{[a]}(A) < n.\end{aligned}$$

可得 $R_{[a]}(A) = (R_{\mathcal{I}}(A))_{[a]}$. □

由定理 1.2.4 , 引理 2.2.8 和定理 2.2.11 可得下面结论.

**推论** 2.2.12. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且对每个 $a \in J(M)$, $R_{[a]}$ 是其截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数. 则

$$R(A)(n) = \bigvee\{a \in J(M) : n \leqslant R_{[a]}(A)\} \tag{2.2.3}$$

$$R(A) = \bigvee_{a \in J(M)} \{a \wedge R_{[a]}(A)\}. \tag{2.2.4}$$

**定理** 2.2.13. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $R_{\mathcal{I}}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. 当 $a \in \alpha(\perp)$ 且 $A \in 2^E$ 时, 有 $R^{[a]}(A) = (R_{\mathcal{I}}(A))^{[a]}$ , 其中 $R^{[a]}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的秩函数.

**证明** 从 $R_{\mathcal{I}}(A)$ 的定义式出发, 我们可以得到以下结论

$$\begin{aligned} n \notin (R_{\mathcal{I}}(A))^{[a]} & \Leftrightarrow a \in \alpha(R_{\mathcal{I}}(A)(n)) \\ & \Leftrightarrow a \in \alpha\left(\bigvee_{\substack{B \subseteq A \\ |B| \geqslant n}} \mathcal{I}(B)\right) = \bigcap_{\substack{B \subseteq A \\ |B| \geqslant n}} \alpha(\mathcal{I}(B)) \\ & \Leftrightarrow \forall B \subseteq A \text{ 且 } |B| \geqslant n,\ a \in \alpha(\mathcal{I}(B)) \\ & \Leftrightarrow \forall B \subseteq A \text{ 且 } B \in \mathcal{I}^{[a]},\ |B| < n \\ & \Leftrightarrow \max\left\{|B| : B \subseteq A, B \in \mathcal{I}^{[a]}\right\} < n \\ & \Leftrightarrow n \nleq R^{[a]}(A). \end{aligned}$$

因此 $R^{[a]}(A) = (R(A))^{[a]}$. □

**推论** 2.2.14. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 并且映射 $R_{\mathcal{I}} : 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数, $\forall a \in P(M)$, $R^{[a]}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的秩函数, 有

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n) = \bigwedge \left\{a \in \alpha(\perp) : n \nleq R^{[a]}(A)\right\}, \tag{2.2.5}$$

$$R_{\mathcal{I}}(A) = \bigwedge_{a \in \alpha(\perp)} \left\{a \vee R^{[a]}(A)\right\}. \tag{2.2.6}$$

上面所给出的三个关于 $M$- 模糊化秩函数的性质定理 2.2.9、2.2.11、2.2.13 及预备知识中的定理 2.2.2 是本书的研究基础, 有了上面的性质我们可以展开对 $M$- 模糊化拟阵的一些基本概念的刻画. 下面又证明了 $M$- 模糊化秩函数满足的两个性质.

**定理** 2.2.15. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 并且映射 $R_{\mathcal{I}} : 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. 则对任意 $x \in E$, 有

$$R_{\mathcal{I}}(A) \leqslant R_{\mathcal{I}}(A \cup x) \leqslant R_{\mathcal{I}}(A) + \underline{1}. \tag{2.2.7}$$

**证明** 直接由 $M$- 模糊化秩函数的定义，我们可以推得 $R_{\mathcal{I}}(A) \leqslant R_{\mathcal{I}}(A \cup x)$ 是成立的. 现我们只需证明

$$R_{\mathcal{I}}(A \cup x) \leqslant R_{\mathcal{I}}(A) + \underline{1}.$$

令 $x \notin A, \forall n \in \mathbb{N}$. 因为

$$\begin{aligned}
& R_{\mathcal{I}}(A \cup x)(n) \\
= & \bigvee\{\mathcal{I}(B) : |B| \geqslant n, B \subseteq A \cup x\} \\
= & \bigvee\{\mathcal{I}(B) : B \subseteq A, |B| \geqslant n\} \vee \bigvee\{\mathcal{I}(B) : B - x \subseteq A, |B - x| \geqslant n - 1\} \\
\leqslant & \bigvee\{\mathcal{I}(B) : B \subseteq A, |B| \geqslant n\} \vee \bigvee\{\mathcal{I}(B_1) : B - x = B_1 \subseteq A, |B_1| \geqslant n - 1\} \\
= & R_{\mathcal{I}}(A)(n) \vee R_{\mathcal{I}}(A)(n-1) \\
= & (R_{\mathcal{I}}(A)(n) \wedge \underline{1}(0)) \vee (R_{\mathcal{I}}(A)(n-1) \wedge \underline{1}(1)) \\
= & \bigvee_{k+l=n} (R_{\mathcal{I}}(A)(k) \wedge \underline{1}(l)) \\
= & (R_{\mathcal{I}}(A) + \underline{1})(n),
\end{aligned}$$

所以 $R_{\mathcal{I}}(A \cup x) \leqslant R_{\mathcal{I}}(A) + \underline{1}$. □

**定理** 2.2.16. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 并且映射 $R_{\mathcal{I}} : 2^E \to \mathbb{N}(M)$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化秩函数. 若 $A, B \in 2^E$. 且对任意的 $y \in B - A$, 有 $R_{\mathcal{I}}(A \cup y) = R_{\mathcal{I}}(A)$, 则 $R_{\mathcal{I}}(A \cup B) = R_{\mathcal{I}}(A)$.

**证明** 假设 $B - A \neq \emptyset$, 令 $B - A = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$. 下面我们对数 $k$ 应用归纳法证明. 若 $k = 1$, 则结论显然成立. 设当 $k = n$ 时结论成立, 下证当 $k = n + 1$ 结论也成立. 由归纳假设和**(FR3)**可知, 对任意 $a \in J(M)$

$$\begin{aligned}
R_{[a]}(A) + R_{[a]}(A) &= R_{[a]}(A \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}) + R_{[a]}(A \cup b_{n+1}) \\
&\geqslant R_{[a]}((A \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}) \cup (A \cup b_{n+1})) \\
&+ R_{[a]}((A \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}) \cap (A \cup b_{n+1})) \\
&= R_{[a]}(A \cup B) + R_{[a]}(A) \geqslant R_{[a]}(A) + R_{[a]}(A).
\end{aligned}$$

这证明了 $R_{[a]}(A \cup B) = R_{[a]}(A)$ 对每一个 $a \in J(M)$ 均成立, 因此 $R_{\mathcal{I}}(A \cup B) = R_{\mathcal{I}}(A)$. □

# 第三章　$M$- 模糊化相关集族

相关集是独立集的对偶概念. 我们知道拟阵是矩阵和图的进一步推广, 而线性相关和线性无关在线性代数中是非常重要的概念. 本章的目的是在已有的 $M$- 模糊化独立集族的基础上定义 $M$- 模糊化相关集族, 并且讨论了 $M$- 模糊化相关集族的一些性质和刻画. 证明了 $M$- 模糊化相关集族与 $M$- 模糊化独立集族可以相互诱导. 这些研究丰富了 $M$- 模糊化拟阵理论的内容, 为拟阵模糊化的进一步研究打下一个坚实的基础.

## 3.1　$M$- 模糊化拟阵的相关集族

在这一节中, 我们将拟阵中的相关集概念推广到 $M$- 模糊化拟阵理论中, 详细讨论了 $M$- 模糊化相关集族的性质, 得到 $M$- 模糊化拟阵和 $M$- 模糊化相关集族可以相互诱导这一重要结论, 也就是, 在一个有限集 $E$ 上的 $M$- 模糊化独立集族的全体和 $M$- 模糊化相关集族的全体之间可以建立起一一对应关系.

在拟阵理论中, 若 $\mathcal{M} = (E,\mathcal{I})$ 是一个拟阵, 且集族 $\mathcal{D} \subseteq 2^E$ 满足以下三个条件, 则称 $\mathcal{D}$ 是拟阵 $\mathcal{M}$ 的相关集族. (见 [43, 60])

**(D1)** $\emptyset \notin \mathcal{D}$.

**(D2)** $\forall A \in \mathcal{D}$, $A \subseteq B \in 2^E \Rightarrow B \in \mathcal{D}$.

**(D3)** $\forall A, B \in \mathcal{D}$ 且 $\forall x \in E$, 若 $A \cap B \notin \mathcal{D}$, 有 $A \cup B - x \in \mathcal{D}$.

同时称满足条件(D1)–(D3)的集族 $\mathcal{D} \subseteq 2^E$ 是集合 $E$ 是的一个相关集族, 由此相关集族也可以刻画出 $E$ 上的一个分明拟阵.

下面给出 $M$- 模糊化相关集族的定义.

**定义** 3.1.1. 设 $E$ 是一个非空有限集合. 称映射 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化相关集族 ($M$-fuzzifying family of dependent sets on $E$) , 如果 $\mathcal{D}$ 满足以下条件:

**(FD1)** $\mathcal{D}(\emptyset) = \perp$.

**(FD2)** $\forall A, B \in 2^E$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{D}(A) \leqslant \mathcal{D}(B)$.

**(FD3)** $\forall A, B \in 2^E$, $\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) \leqslant \mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge\limits_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x)$.

当 $A \in 2^E$ 时, 称 $\mathcal{D}(A)$ 是集合 $A$ 的 $M$- 模糊化相关度.

**定理** 3.1.2. 设 $E$ 是一个非空有限集合, $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 是一映射. 则以下条件等价:

**(1)** $\mathcal{D}$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化相关集族.

**(2)** $\forall a \in J(M)$, $\mathcal{D}_{[a]}$ 是 $E$ 上的相关集族.

**(3)** $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{D}^{(a)}$ 是 $E$ 上的相关集族.

**证明** (1) $\Rightarrow$ (2). 任取 $a \in J(M)$, 由 (FD1), 可知 $\emptyset \notin \mathcal{D}_{[a]}$.

设 $A, B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 若 $A \in \mathcal{D}_{[a]}$, 则 $a \leqslant \mathcal{D}(A) \leqslant \mathcal{D}(B)$. 这证明了 $B \in \mathcal{D}_{[a]}$.

另外, 设 $A, B \in \mathcal{D}_{[a]}$, $\forall x \in E$. 且 $A \cap B \notin \mathcal{D}_{[a]}$, 则 $\mathcal{D}(A) \geqslant a$, $\mathcal{D}(B) \geqslant a$ 且 $\mathcal{D}(A \cap B) \ngeqslant a$. 由

$$\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) \leqslant \mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x),$$

我们知道 $\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x)\geqslant a$. 也就是, 对于任意的 $x\in E$, $A\cup B-x\in\mathcal{D}_{[a]}$.

这证明了 $\mathcal{D}_{[a]}$ 满足条件**(D1)–(D3)**. 由拟阵的性质可知, $\mathcal{D}_{[a]}$ 是 $E$ 上的一个相关集族.

(2) $\Rightarrow$ (1). $\forall a\in J(M)$, 由 $\emptyset\notin\mathcal{D}_{[a]}$ 我们可以推得 $\mathcal{D}(\emptyset)=\perp$.

设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$, 如果 $\mathcal{D}(A)\geqslant a$, 那么 $A\in\mathcal{D}_{[a]}$. 由 $\mathcal{D}_{[a]}$ 是 $E$ 上的一个相关集族, 可知 $B\in\mathcal{D}_{[a]}$, 也就是, $\mathcal{D}(B)\geqslant a$. 从而 $\mathcal{D}(A)\leqslant\mathcal{D}(B)$.

另外, 设 $A,B\in 2^E$, $\forall x\in E$, 若 $\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B)\geqslant a,\mathcal{D}(A\cap B)\ngeqslant a$, 那么 $A\in\mathcal{D}_{[a]}$, $B\in\mathcal{D}_{[a]}$ 且 $A\cap B\notin\mathcal{D}_{[a]}$. 因此对任意 $x\in E$, $A\cup B-x\in\mathcal{D}_{[a]}$, 即 $\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x)\geqslant a$. 从而

$$\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B)\leqslant\mathcal{D}(A\cap B)\vee\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x).$$

所以 $\mathcal{D}$ 满足条件**(FD1)–(FD3)**. 因此 $\mathcal{D}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族.

(1) $\Rightarrow$ (3). $\forall a\in P(M)$, 由**(FD1)**可得 $\mathcal{D}(\emptyset)=\perp\leqslant a$, 所以 $\emptyset\notin\mathcal{D}^{(a)}$.

设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$, 如果 $A\in\mathcal{D}^{(a)}$, 那么 $\mathcal{D}(B)\geqslant\mathcal{D}(A)\nleqslant a$. 从而证明了 $\mathcal{D}(B)\nleqslant a$, 也就是, $B\in\mathcal{D}^{(a)}$.

另外, 设 $A,B\in\mathcal{D}^{(a)}$, $\forall x\in E$, 如果 $A\cap B\notin\mathcal{D}^{(a)}$, 那么

$$\mathcal{D}(A)\nleqslant a,\mathcal{D}(B)\nleqslant a \text{ 且 } \mathcal{D}(A\cap B)\leqslant a.$$

因为 $a$ 是一个素元, 所以有

$$\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B)\nleqslant a.$$

由

$$\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) \leqslant \mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x),$$

可得 $\bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x) \nleqslant a$ , 故对于任意的 $x \in E$, $A \cup B - x \in \mathcal{D}^{(a)}$.

这就证明了 $\mathcal{D}^{(a)}$ 满足条件**(D1)–(D3)**. 从而 $\mathcal{D}^{(a)}$ 是 $E$ 上的一个相关集族.

(3) ⇒ (1). $\forall a \in P(M)$, 由 $\emptyset \notin \mathcal{D}^{(a)}$ 可得 $\mathcal{D}(\emptyset) = \perp$.

设 $A, B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 如果 $\mathcal{D}(A) \nleqslant a$, 那么 $A \in \mathcal{D}^{(a)}$. 这就证明了 $B \in \mathcal{D}^{(a)}$, 也就是, $\mathcal{D}(B) \nleqslant a$. 从而 $\mathcal{D}(A) \leqslant \mathcal{D}(B)$.

再设 $A, B \in 2^E$ 且 $x \in E$, 如果 $\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) \nleqslant a, \mathcal{D}(A \cap B) \leqslant a$, 那么 $A \in \mathcal{D}^{(a)}$, $B \in \mathcal{D}^{(a)}$ 且 $A \cap B \notin \mathcal{D}^{(a)}$. 由于 $\mathcal{D}^{(a)}$ 是 $E$ 上的一个相关集族, 因此对于任意 $x \in E$, 有 $A \cup B - x \in \mathcal{D}^{(a)}$, 即 $\mathcal{D}(A \cup B - x) \nleqslant a$. 由于 $a$ 是素元, 并且 $E$ 是一个有限集合, 因此可得 $\bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x) \nleqslant a$. 从而 $\mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x) \nleqslant a$. 故我们可以得到

$$\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) \leqslant \mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x).$$

也就证明了 $\mathcal{D}$ 满足条件**(FD1)–(FD3)**. 所以 $\mathcal{D}$ 是集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族. □

**定理** 3.1.3. 设 $E$ 是一个非空有限集合, $\mathcal{D}: 2^E \to M$ 是一映射, 其中 $M$ 满足条件**(BETA)**. 则 $\mathcal{D}$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化相关集族, 当且仅当对任意的 $a \in \beta(\top)$, $\mathcal{D}_{(a)}$ 都是 $E$ 上的一个相关集族.

**证明** 必要性. 设 $\mathcal{D}$ 是集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族. $\forall a \in \beta(\top)$, 显然 $a \notin \emptyset = \beta(\top) = \beta(\mathcal{D}(\emptyset))$, 所以 $\emptyset \notin \mathcal{D}_{(a)}$.

设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$, 如果 $A\in\mathcal{D}_{(a)}$, 即 $a\in\beta(\mathcal{D}(A))$. 由 $\mathcal{D}(A)\leqslant\mathcal{D}(B)$, 可得 $a\in\beta(\mathcal{D}(B))$, 也就是, $B\in\mathcal{D}_{(a)}$.

另外, 设 $A,B\in\mathcal{D}_{(a)}$, $x\in E$ 且 $a\in\beta(\top)$, 则

$$\begin{aligned} a\in\ & \beta(\mathcal{D}(A))\cap\beta(\mathcal{D}(B))=\beta(\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B)) \\ \subseteq\ & \beta(\mathcal{D}(A\cap B)\vee\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x)) \\ =\ & \beta(\mathcal{D}(A\cap B))\cup\beta(\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x)) \\ =\ & \beta(\mathcal{D}(A\cap B))\cup\bigcap_{x\in E}\beta(\mathcal{D}(A\cup B-x)). \end{aligned}$$

如果 $A\cap B\notin\mathcal{D}_{(a)}$, 也就是, $a\notin\beta(\mathcal{D}(A\cap B))$, 则

$$a\in\bigcap_{x\in E}\beta(\mathcal{D}(A\cup B-x))\subseteq\beta(\mathcal{D}(A\cup B-x)).$$

这表明对于任意的 $x\in E$, 都有 $A\cup B-x\in\mathcal{D}_{(a)}$. 从而 $\mathcal{D}_{(a)}$ 是集合 $E$ 上的相关集族.

充分性. 设 $\forall a\in\beta(\top)$, $\mathcal{D}_{(a)}$ 是 $E$ 上的一个相关集族. 下面我们来证明 $\mathcal{D}$ 满足条件**(FD1)**, **(FD2)** 和**(FD3)**.

**(FD1)** $\forall a\in\beta(\top)$, 显然 $\emptyset\notin\mathcal{D}_{(a)}$. 这说明

$$a\in\beta(\top), a\notin\beta(\mathcal{D}(\emptyset)).$$

从而 $\mathcal{D}(\emptyset)=\bot$.

**(FD2)** 设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$. 如果 $a\in\beta(\mathcal{D}(A))$, 即 $A\in\mathcal{D}_{(a)}$, 那么 $B\in\mathcal{D}_{(a)}$, 也就是, $a\in\beta(\mathcal{D}(B))$. 从而 $\mathcal{D}(A)\leqslant\mathcal{D}(B)$.

**(FD3)**设 $A,B\in 2^E$ 且 $x\in E$, 若 $a\in\beta(\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B))$, 则由

$$\beta(\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B))=\beta(\mathcal{D}(A))\cap\beta(\mathcal{D}(B))$$

可得 $A \in \mathcal{D}_{(a)}$, $B \in \mathcal{D}_{(a)}$. 且若 $A \cap B \notin \mathcal{D}_{(a)}$, 那么对任意的 $x \in E$ 有 $A \cap B - x \in \mathcal{D}_{(a)}$, 所以,

$$a \in \bigcap_{x \in E} \beta(\mathcal{D}(A \cup B - x)) = \beta(\bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x)).$$

从而 $\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B) \leqslant \mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x)$. □

**定理** 3.1.4. 设 $E$ 是一个非空有限集合, 且 $\mathcal{D} : 2^E \to M$, 其中 $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 则 $\mathcal{D}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族, 当且仅当对任意的 $a \in \alpha(\perp)$, $\mathcal{D}^{[a]}$ 是 $E$ 上的一个相关集族.

**证明** 必要性. 设 $\mathcal{D}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族. $\forall a \in \alpha(\perp)$, 显然 $\emptyset \notin \mathcal{D}^{[a]}$.

设 $A, B \in 2^E$ 且 $A \subseteq B$, 若 $A \in \mathcal{D}^{[a]}$, 即 $a \notin \alpha(\mathcal{D}(A))$. 由于 $\mathcal{D}(A) \leqslant \mathcal{D}(B)$, 所以 $a \notin \alpha(\mathcal{D}(B))$, 也就是, $B \in \mathcal{D}^{[a]}$.

另外, 设 $A, B \in \mathcal{D}^{[a]}$, $\forall x \in E$ 且 $a \in \alpha(\perp)$, 有

$$\begin{aligned} a \notin \;& \alpha(\mathcal{D}(A)) \cup \alpha(\mathcal{D}(B)) = \alpha(\mathcal{D}(A) \wedge \mathcal{D}(B)) \\ \supseteq \;& \alpha(\mathcal{D}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x)) \\ = \;& \alpha(\mathcal{D}(A \cap B)) \cap \alpha(\bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}(A \cup B - x)) \\ = \;& \alpha(\mathcal{D}(A \cap B)) \cap \bigcup_{x \in E} \alpha(\mathcal{D}(A \cup B - x)). \end{aligned}$$

若 $A \cap B \notin \mathcal{D}^{[a]}$, 那么 $a \in \alpha(\mathcal{D}(A \cap B))$, 于是

$$a \notin \bigcup_{x \in E} \alpha(\mathcal{D}(A \cup B - x)) \supseteq \alpha(\mathcal{D}(A \cup B - x)).$$

这表明对于任意的 $x \in E$, 可得 $A \cup B - x \in \mathcal{D}^{[a]}$. 从而 $\mathcal{D}^{[a]}$ 是 $E$ 上的一个相关集族.

充分性. 设 $\forall a\in\alpha(\perp)$, $\mathcal{D}^{[a]}$ 都是 $E$ 上的一个相关集族. 下证 $\mathcal{D}$ 满足(**FD1**), (**FD2**)和(**FD3**).

**(FD1)** 设 $\forall a\in\alpha(\perp)$, 显然 $\emptyset\notin\mathcal{D}^{[a]}$. 也就是对任意 $a\in\alpha(\perp)$, $a\in\alpha(\mathcal{D}(\emptyset))$. 从而 $\mathcal{D}(\emptyset)=\perp$.

**(FD2)** 设 $A,B\in 2^E$ 且 $A\subseteq B$. 如果 $a\notin\alpha(\mathcal{D}(A))$, 则 $A\in\mathcal{D}^{[a]}$. 因此 $B\in\mathcal{D}^{[a]}$, 也就是, $a\notin\alpha(\mathcal{D}(B))$. 从而 $\mathcal{D}(A)\leqslant\mathcal{D}(B)$.

**(FD3)** 设 $A,B\in 2^E$ 且 $x\in E$, 如果 $a\notin\alpha(\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B))$, 由

$$\alpha(\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B))=\alpha(\mathcal{D}(A))\cup\alpha(\mathcal{D}(B))$$

可以推得 $A\in\mathcal{D}^{[a]}$, $B\in\mathcal{D}^{[a]}$. 又若 $A\cap B\notin\mathcal{D}^{[a]}$. 则对任意的 $x\in E$ 有 $A\cap B-x\in\mathcal{D}^{[a]}$, 也就是,

$$a\notin\bigcup_{x\in E}\alpha(\mathcal{D}(A\cup B-x))=\alpha(\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x)).$$

从而 $\mathcal{D}(A)\wedge\mathcal{D}(B)\leqslant\mathcal{D}(A\cap B)\vee\bigwedge_{x\in E}\mathcal{D}(A\cup B-x)$.

故 $\mathcal{D}$ 是集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族. □

**定理** 3.1.5. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 定义映射 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}:2^E\to M$ 如下

$$\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A)=(\mathcal{I}(A))'.$$

则 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族, 称其为由 $(E,\mathcal{I})$ 所诱导的 $M$- 模糊化相关集族.

**证明** 由(**FI1**) 和(**FI2**)很容易推证(**FD1**) 和(**FD2**). 下面验证(**FD3**)成立.

设 $A,B\in 2^E,\forall x\in E$. 如果任取 $a\in P(M)$, $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A)\wedge\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(B)\nleq a$ 且 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A\cap B)\leqslant a$, 那么 $\mathcal{I}(A)\ngeq a'$, $\mathcal{I}(B)\ngeq a'$ 且 $\mathcal{I}(A\cap B)\geqslant a'$, 也就是, $A\in(\mathcal{I}_{[a']})'$, $B\in(\mathcal{I}_{[a']})'$ 且 $A\cap B\in\mathcal{I}_{[a']}$. 因为 $(\mathcal{I}_{[a']})'$ 是一个

拟阵的相关集族, 有 $A \cup B - x \in (\mathcal{I}_{[a']})'$. 所以对任意的 $x \in E$, $\mathcal{I}(A \cup B - x) \not\geqslant a'$. 也就证明了

$$\bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cup B - x) = \bigwedge_{x \in E} (\mathcal{I}(A \cup B - x))' \not\leqslant a.$$

从而 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A) \wedge \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(B) \leqslant \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cap B) \vee \bigwedge_{x \in E} \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cup B - x)$.

因此 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ 是集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化相关集族. □

**定理** 3.1.6. 设 $E$ 是一个非空有限集合, 且 $\mathcal{D}: 2^E \to M$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化相关集族. 当 $A \in 2^E$ 时, 定义 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A) = (\mathcal{D}(A))'$. 则 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{D}})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$.

**证明** 由(FD1)和(FD2)可推知(FI1) 和(FI2). 下证(FI3)成立.

设 $A, B \in 2^E$ 且 $|A| < |B|$, 如果 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(B) \neq \perp$ 并且 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(B) \not\leqslant a$ $(a \in P(M))$. 那么 $\mathcal{D}(A) \not\geqslant a'$ 且 $\mathcal{D}(B) \not\geqslant a'$. 由定理 3.1.2 中的 (3), 我们可以得到 $A \in (\mathcal{D}_{[a']})'$ 和 $B \in (\mathcal{D}_{[a']})'$. 因为 $(\mathcal{D}_{[a']})'$ 是拟阵的独立集族, 所以存在

$$e \in B - A, A \cup e \in (\mathcal{D}_{[a']})$$

这也就证明了 $\mathcal{D}(A \cup e) \not\geqslant a'$, 即 $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A \cup e) \not\leqslant a$. 从而

$$\bigvee_{e \in B - A} \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A \cup e) \not\leqslant a.$$

故 $\bigvee_{e \in B - A} \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A \cup e) \geqslant \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(A) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{D}}(B)$.

由定理 3.1.5, 很容易验证 $\mathcal{D}_{\mathcal{I}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$. □

关于 $M$- 模糊化相关集族我们还有以下结论.

**定理** 3.1.7. 设 $\{\mathcal{D}(a) : a \in P(M)\}$ 是 $E$ 上的一族相关集族.

**(1)** 如果 $b \in \alpha^*(a) \Rightarrow \mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a)$, 那么存在一个 $M$- 模糊化相关集族 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 使得 $\mathcal{D}^{(a)} \subseteq \mathcal{D}(a) \subseteq \mathcal{D}^{[a]}$.

**(2)** $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{D}(a) = \bigcup\{\mathcal{D}(b) : b \in \alpha(a)\}$, 那么存在一个 $M$-模糊化相关集族 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 使得 $\mathcal{D}^{(a)} = \mathcal{D}(a)$.

**(3)** $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{D}(a) = \bigcap\{\mathcal{D}(b) : a \in \alpha(b)\}$, 那么存在一个 $M$-模糊化相关集族 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 使得 $\mathcal{D}^{[a]} = \mathcal{D}(a)$.

**证明** (1) 设 $b \in \alpha^*(a) \Rightarrow \mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a)$. 令映射 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 定义如下

$$\mathcal{D}(A) = \bigwedge_{a \in P(M)} (a \vee \mathcal{D}(a)(A)) = \bigwedge\{a \in P(M) : A \notin \mathcal{D}(a)\}.$$

由模糊集合套性质, 我们可以推得 $\mathcal{D}^{(a)} \subseteq \mathcal{D}(a) \subseteq \mathcal{D}^{[a]}$.

(2) 和 (3) 的证明与 (1) 相似. □

**定理** 3.1.8. 设 $\{\mathcal{D}(a) : a \in M\}$ 是集合 $E$ 上的一族相关集族, 并且 $M$ 满足条件(**BETA**). 则

**(1)** 如果 $a \in \beta(b) \Rightarrow \mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a)$, 那么存在一个 $M$- 模糊化相关集族 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 使得 $\mathcal{D}_{(a)} \subseteq \mathcal{D}(a) \subseteq \mathcal{D}_{[a]}$.

**(2)** $\forall a \in \beta(\top)$, $\mathcal{D}(a) = \bigcup\{\mathcal{D}(b) : a \in \beta(b)\}$ , 那么存在一个 $M$-模糊化相关集族 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 使得 $\mathcal{D}_{(a)} = \mathcal{D}(a)$.

**(3)** $\forall a \in J(M)$, $\mathcal{D}(a) = \bigcap\{\mathcal{D}(b) : b \in \beta(a)\}$ , 那么存在一个 $M$-模糊化相关集族 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 使得 $\mathcal{D}_{[a]} = \mathcal{D}(a)$.

**证明** 设 $a \in \beta(b) \Rightarrow \mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a)$. 定义映射 $\mathcal{D} : 2^E \to M$ 如下

$$\mathcal{D}(A) = \bigvee_{a \in M} (a \wedge \mathcal{D}(a)(A)) = \bigvee\{a \in M : A \in \mathcal{D}(a)\}.$$

由 $M$- 模糊集合套性质, 我们可以得到 $\mathcal{D}_{(a)} \subseteq \mathcal{D}(a) \subseteq \mathcal{D}_{[a]}$.

类似可证 (2) 和 (3). □

## 3.2 $M$- 模糊化拟阵的实例

在这一节中, 首先说明加权拟阵 (weighted matroid) 是一个模糊化拟阵 [86].

设 $(E, I)$ 是具有权函数 $w: E \longrightarrow [0, 1]$ 的加权拟阵 [17]. 定义 $\mathfrak{I}_I : 2^E \longrightarrow [0, 1]$ 如下

$$\forall A \subseteq E,\ \mathfrak{I}_I(A) = \begin{cases} \min\limits_{e \in A} w(e), & A \in \mathcal{I}. \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

可以验证 $(E, \mathfrak{I}_I)$ 是一个模糊化拟阵. 进而, 如果 $(E, I)$ 无环, 也就是, $\forall e \in E,\ \{e\} \in I$, 那么 $\forall e \in E,\ w(e) = \mathfrak{I}_I(\{e\})$. 我们可以得到结论, 每一个无环的加权拟阵都可以看做是一个模糊化拟阵.

**注** 3.2.1 ([86]). (1) 由于一个加权图可以和一个加权拟阵相互刻画, 所以加权图也可以看做是模糊化拟阵的特例.

(2) 用加权图来刻画实际问题时, 我们往往限制其是无环的加权图, 因为在一些实际问题中往往并不需要加环, 而且大多数情况下无环并不影响实际问题的解决. 例如, 环游地球问题, 用图表示时, 将城市看做点, 两个城市间的距离函数是附加在边上的权函数, 在表示这个问题时只需要用无环图来描述即可. 所以我们考虑无环加权图是合理的

设 $G$ 是一个加权图. 用 $\mathcal{M}[G]=(E,\ I[G])$ 来表示与 $G$ 对应的加权拟阵并且与之对应的模糊化拟阵为 $\mathcal{M}=(E,\ \mathfrak{I}_{I[G]})$.

**定义** 3.2.2 ([86]). 称一个模糊化拟阵 $\mathcal{M}=(E,\ \mathfrak{I})$ 是可图的, 如果存在一个加权图 $G$ 有 $\mathcal{M}\cong\mathcal{M}[G]$ .

**例** 3.2.3 ([86]). 设 $E=\{x,\ y\}$ 并且定义 $\mathfrak{I}:2^E\longrightarrow[0,\ 1]$ 如下

$$\mathfrak{I}(A)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & A\in\{\{x\},\{x,y\}\}.\\ 1, & A\in\{\emptyset,\{y\}\}.\end{cases}$$

很容易可以验证 $(E,\ \mathfrak{I})$ 是一个可图的模糊化拟阵. 与之相对应的加权图为




其中 $\frac{1}{2}$, 1 分别是 $x$, $y$ 的权值.

下面再给出 $M$- 模糊化拟阵及与其对应的 $M$- 模糊化秩函数的一个实例.

**例** 3.2.4. 令 $E=\{x,y,z\}$ 并且 $M=[0,1]$. 定义 $\mathcal{I}:2^E\to M$, 其定义式如下

$$\mathcal{I}(A)=\begin{cases}0, & A\in\{E,\{y,z\}\};\\ 0.3, & A\in\{\{z\},\{x,z\}\};\\ 0.5, & A\in\{\{y\},\{x,y\}\};\\ 0.7, & A=\{x\};\\ 1, & A=\emptyset.\end{cases}\tag{3.2.1}$$

则 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 由

$$R_{\mathcal{I}}(A)(n)=\bigvee\{\mathcal{I}(B):B\subseteq A,|B|\geqslant n\},$$

可知 $M$- 模糊化秩函数 $R_{\mathcal{I}}: 2^E \to \mathbb{N}(I)$ 如下:

$$R_{\mathcal{I}}(\emptyset)(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0; \end{cases} \qquad R_{\mathcal{I}}(\{x\})(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.7, & n = 1; \\ 0, & n \geq 2; \end{cases}$$

$$R_{\mathcal{I}}(\{y\})(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.5, & n = 1; \\ 0, & n \geq 2; \end{cases} \qquad R_{\mathcal{I}}(\{z\})(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.3, & n = 1; \\ 0, & n \geq 2; \end{cases}$$

$$R_{\mathcal{I}}(\{x, y\})(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.7, & n = 1; \\ 0.5, & n = 2; \\ 0, & n \geq 3; \end{cases} \qquad R_{\mathcal{I}}(\{x, z\})(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.7, & n = 1; \\ 0.3, & n = 2; \\ 0, & n \geq 3; \end{cases}$$

$$R_{\mathcal{I}}(\{y, z\})(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.5, & n = 1; \\ 0, & n \geq 2; \end{cases} \qquad R_{\mathcal{I}}(E)(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0.7, & n = 1; \\ 0.5, & n = 2; \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

# 第四章 $M$- 模糊化闭包算子、$M$- 模糊化闭集族、$M$- 模糊化内部算子和 $M$- 模糊化开集族

在拟阵理论中, 闭包算子、闭集、内部算子和开集均能用来刻画拟阵, 它们可以相互诱导. 一个拟阵的全体闭集在集合包含序下构成一个几何格, 拟阵和几何格之间也是可以相互确定的. 闭集可以说是连接拟阵和几何格的一座桥梁.

正因为闭包算子和闭集在拟阵理论中的重要性, 所以在本章中, 我们将在已有 $M$- 模糊化拟阵及 $M$- 模糊化秩函数的基础上, 利用 $M$- 模糊化拟阵的截拟阵及秩函数的性质, 引入了 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子、$M$- 模糊化 $J$- 闭包算子、$M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子及 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子的定义, 并研究了它们的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系.

另外, 我们通过四种 $M$- 模糊化闭包算子, 分别给出相应的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族,$M$- 模糊化 $J$- 闭集族, $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族和 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族概念, 研究了它们的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系.

开集和闭集是一对对偶的概念, 内部算子和闭包算子也是一对对偶概念. 在上述工作的基础上, 我们又引入了 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子、$M$- 模糊化 $J$- 内部算子、$M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子、$M$- 模糊化 $P$- 内部算子、$M$- 模糊化 $\beta$- 开集族、$M$- 模糊化 $J$- 开集族、$M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族和 $M$- 模糊化 $P$- 开集

族等概念, 研究了它们的性质及其与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系.

这些研究为进一步完善 $M$- 模糊化拟阵的公理体系奠定了基础.

## 4.1 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子和 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族

下面我们先给出 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子的定义.

**定义** 4.1.1. 设 $E$ 是一个非空有限集合. 称映射

$$\mathrm{cl}^{\beta}: 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$$

为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子 ($M$-fuzzifying $\beta$-closure operator on $E$) , 如果映射 $\mathrm{cl}^{\beta}$ 满足:

设 $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 及 $\forall a \in \beta(\top)$,

**(FBC1)** $A \subseteq \mathrm{cl}^{\beta}(A, a)$.

**(FBC2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{cl}^{\beta}(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^{\beta}(A, a)$.

**(FBC3)** $\mathrm{cl}^{\beta}(\mathrm{cl}^{\beta}(A, a), a) = \mathrm{cl}^{\beta}(A, a)$.

**(FBC4)** 如果 $y \in \mathrm{cl}^{\beta}(A \cup \{x\}, a) - \mathrm{cl}^{\beta}(A, a)$, 那么 $x \in \mathrm{cl}^{\beta}(A \cup \{y\}, a)$.

**(FBC5)** $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^{\beta}(A - x, a)\right) = \emptyset \Leftrightarrow \exists b \in \beta(\top)$ 使得 $a \in \beta(b)$ 且 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^{\beta}(A - x, b)\right) = \emptyset$.

**例** 4.1.2. 设 $E=\{x,y,z\}$ 且 $M=[0,1]$. 定义映射

$$\mathrm{cl}^{\beta}:2^E\times[0,1)\to 2^E$$

如下

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\emptyset,a)=\begin{cases}E, & a\in[0.7,1);\\ \{y,z\}, & a\in[0.5,0.7);\\ \{z\}, & a\in[0.3,0.5);\\ \emptyset, & a\in[0,0.3);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\{x\},a)=\begin{cases}E, & a\in[0.5,1);\\ \{x,z\}, & a\in[0.3,0.5);\\ \{x\}, & a\in[0,0.3);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\{y\},a)=\begin{cases}E, & a\in[0.7,1);\\ \{y,z\}, & a\in[0,0.7);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\{z\},a)=\begin{cases}E, & a\in[0.7,1);\\ \{y,z\}, & a\in[0.5,0.7);\\ \{z\}, & a\in[0,0.5);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\{x,z\},a)=\begin{cases}E, & a\in[0.5,1);\\ \{x,z\}, & a\in[0,0.5);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\{y,z\},a)=\begin{cases}E, & a\in[0.7,1);\\ \{y,z\}, & a\in[0,0.7);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}^{\beta}(\{x,y\},a)=\mathrm{cl}^{\beta}(E,a)=E\quad(a\in[0,1)).$$

很容易验证 $\mathrm{cl}^{\beta}$ 满足(**FBC1**)–(**FBC4**)及(**FBC5**). 所以映射 $\mathrm{cl}^{\beta}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子.

**定理** 4.1.3. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $M$ 满足条件 (**BETA**). 映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}: 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A,a) = \left\{x \in E : R_{(a)}(A) = R_{(a)}(A \cup \{x\})\right\}, \tag{4.1.1}$$

其中 $R_{(a)}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数. 则 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子.

**证明** 我们可以看出 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}|_{2^E\times\{a\}}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 所对应的闭包算子, 并且 $A \in \mathcal{I}_{(a)}$ (或 $R_{(a)}(A) = |A|$) 当且仅当

$$A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A-x,a)\right) = \emptyset.$$

因此由拟阵的闭包性质知(**FBC1**)-(**FBC4**) 显然成立. 另外, 由定理 1.2.4 中的 (4), 可以推知(**FBC5**) 也成立. □

**引理** 4.1.4. 设 $E$ 是非空有限集合, 令 $\mathrm{cl}^{\beta}: 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 是 $E$ 上一个的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子, 则 $\mathrm{cl}^{\beta}$ 还满足以下条件:

$\forall A \in 2^E$ 及 $\forall a \in \beta(\top)$,

(**FBC6**) 存在 $B \subseteq A$ 使得

$$\mathrm{cl}^{\beta}(A,a) = \mathrm{cl}^{\beta}(B,a), B \cap \left(\bigcap_{x\in B} \mathrm{cl}^{\beta}(B-x,a)\right) = \emptyset,$$

且

$$(B\cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in B\cup y} \mathrm{cl}^{\beta}(B\cup y-x,a)\right) \neq \emptyset,$$

其中 $y \in \mathrm{cl}^{\beta}(B,a) - B$.

**(FBC7)** 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么

$$(A\cup y)\cap\left(\bigcap_{x\in A\cup y}\mathrm{cl}^{\beta}(A\cup y-x,a)\right)\neq\emptyset$$

当且仅当 $y\in\mathrm{cl}^{\beta}(A,a)-A$.

**(FBC8)** 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么

$$\mathrm{cl}^{\beta}(A,b)=\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^{\beta}(A,a).$$

**证明** 设 $\mathrm{cl}^{\beta}$ 满足条件**(FBC1)-(FBC4)及(FBC5)**, 则对于某个 $a\in\beta(\top)$ 存在拟阵 $(E,\mathcal{I}_a)$ 以 $\mathrm{cl}^{\beta}|_{2^E\times\{a\}}$ 作为闭包算子. 并且 $A\in\mathcal{I}_a$ 当且仅当 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset$. 从而对于 $(E,\mathcal{I}_a)$ 有**(FBC6)** 和**(FBC7)** 成立.

**(FBC8)** 设 $A\in 2^E$ 且 $a\in\beta(\top)$, 若 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么 $A\in\mathcal{I}_a$. 令 $R_a$ 是 $(E,\mathcal{I}_a)$ 的秩函数. 则 $R_a(A)=|A|$. 由 (FBC5) 我们可以推得 $\mathcal{I}_b=\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathcal{I}_a$, 则 $A\in\mathcal{I}_b$, 也就是,

$$A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,b)\right)=\emptyset.$$

为了证明 $\mathrm{cl}^{\beta}(A,b)=\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^{\beta}(A,a)$, 假设 $x\in\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^{\beta}(A,a)-A$. 则对于任意满足 $b\in\beta(a)$ 的 $a\in\beta(\top)$, 有 $R_a(A\cup x)=R_a(A)=|A|$. 由此我们可以推证 $A\cup x\notin\mathcal{I}_a$. 故 $A\cup x\notin\mathcal{I}_b$. 从而 $(A\cup x)\cap$

$\left(\bigcap_{y\in A\cup x}\mathrm{cl}^{\beta}(A\cup x-y,b)\right)\neq\emptyset$. 由 (FBC7) 可得 $x\in\mathrm{cl}^{\beta}(A,b)-A$. 也就证得了 $\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^{\beta}(A,a)\subseteq\mathrm{cl}^{\beta}(A,b)$.

反之, 如果 $x\in\mathrm{cl}^{\beta}(A,b)-A$, 那么 $R_b(A)=R_b(A\cup x)$, 也就是, $A\cup x\notin\mathcal{I}_b$. 由 (FBC5), 对于任意满足条件 $b\in\beta(a)$ 的 $a\in\beta(\top)$ , 有 $A\cup x\notin\mathcal{I}_a$, 即, $(A\cup x)\cap\left(\bigcap_{y\in A\cup x}\mathrm{cl}^{\beta}(A\cup x-y,a)\right)\neq\emptyset$. 从而 $x\in\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^{\beta}(A,a)-A$. 故 $\mathrm{cl}^{\beta}(A,b)\subseteq\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^{\beta}(A,a)$. 因此**(FBC8)**得证. □

对于一个拟阵 $\mathcal{M}=(E,I)$, 如果 $\mathrm{cl}:2^E\to 2^E$ 是 $\mathcal{M}$ 的闭包算子, 那么 $A\in I$ 当且仅当对任意的 $x\in A$, $x\notin\mathrm{cl}(A-x)$, 于是我们可以由 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子出发, 定义 $M$- 模糊化独立集族.

**定理** 4.1.5. 设 $\mathrm{cl}^{\beta}:2^E\times\beta(\top)\to 2^E$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$-闭包算子, 其中 $M$ 满足条件 **(BETA)**. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}}:2^E\to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}}(A)=\bigvee\left\{a\in\beta(\top):A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset\right\}. \quad (4.1.2)$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{cl}^{\beta}=\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}}}$.

**证明** 为了证明 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们只需要验证对任意的 $a\in\beta(\top)$,

$$A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}})_{(a)}\Leftrightarrow A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset. \quad (4.1.3)$$

一方面, 若 $a \in \beta(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}(A))$, 则存在 $b \in \beta(\top)$ 使得 $a \in \beta(b)$ 且 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^\beta(A - x, b)\right) = \emptyset$. 由(**FBC5**)可以推知

$$A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^\beta(A - x, a)\right) = \emptyset.$$

另一方面, 若 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^\beta(A - x, a)\right) = \emptyset$, 则有 $b \in \beta(\top)$ 使得 $a \in \beta(b)$ 且 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^\beta(A - x, b)\right) = \emptyset$. 从而 $b \leqslant \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}(A)$, $a \in \beta(b) \subseteq \beta(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}(A))$.

故有 $A \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)} \Leftrightarrow A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^\beta(A - x, a)\right) = \emptyset$.

因为 $\mathrm{cl}^\beta|_{2^E\times\{a\}}$ 满足(**FBC1**)-(**FBC4**), 所以存在一个拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_a)$ 以 $\mathrm{cl}^\beta|_{2^E\times\{a\}}$ 为闭包算子, 且 $A \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_a$ 当且仅当 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^\beta(A - x, a)\right) = \emptyset$. 从而证明了 $(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_a = (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)}$. 由定理 2.1.4, 可以推证 $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下面我们验证 $\mathrm{cl}^\beta = \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}$.

由(**FBC6**) 和(**FBC7**)可知, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在 $B \subseteq A$ 使得 $\mathrm{cl}^\beta(A, a) = \mathrm{cl}^\beta(B, a)$, $B \cap \left(\bigcap_{x\in B} \mathrm{cl}^\beta(B - x, a)\right) = \emptyset$, 并且任取 $y \in \mathrm{cl}^\beta(B, a) - B$, 有 $(B \cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in B\cup y} \mathrm{cl}^\beta(B \cup y - x, a)\right) \neq \emptyset$. 由此可以证明 $B \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)}$ 并且 $B \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)}$. 因此

$$|B| = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}})_{(a)}(B) \leqslant (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}})_{(a)}(B \cup y) < |B \cup y| = |B| + 1,$$

即 $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}})_{(a)}(B) = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}})_{(a)}(B \cup y)$. 于是 $y \in \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(B, a)$. 从而 $\mathrm{cl}^\beta(A, a) = \mathrm{cl}^\beta(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(A, a)$.

另外, 由拟阵闭包算子的性质, 对于 $a \in \beta(\top)$, 我们可以找到 $(E, (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)})$ 的一个基 $C$ , 令 $B = A \cap C$, 则我们可以知道 $\mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(A, a) = \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(B, a)$, $B \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)}$ 并且 $B \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta})_{(a)}$, 其中 $y \in \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(B, a) - B$. 从而证得, $B \cap \left(\bigcap_{x \in B} \mathrm{cl}^\beta(B - x, a)\right) = \emptyset$ 且 $(B \cup y) \cap \left(\bigcap_{x \in B \cup y} \mathrm{cl}^\beta(B \cup y - x, a)\right) \neq \emptyset$. 故由条件(**FBC7**)知 $y \in \mathrm{cl}^\beta(B, a)$. 所以 $\mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(A, a) = \mathrm{cl}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta}}(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^\beta(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^\beta(A, a)$. □

**定理** 4.1.6. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta_\mathcal{I}} = \mathcal{I}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$, 由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta_\mathcal{I}}(A) &= \bigvee \left\{a \in \beta(\top) : A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^\beta_\mathcal{I}(A - x, a)\right) = \emptyset\right\} \\
&= \bigvee \{a \in \beta(\top) : A \in \mathcal{I}_{(a)}\} \\
&= \bigvee \{a \in \beta(\top) : a \in \beta(\mathcal{I}(A))\} \\
&= \mathcal{I}(A).
\end{aligned}
$$

因此 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\beta_\mathcal{I}} = \mathcal{I}$. □

**例** 4.1.7. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 其中 $M = [0, 1]$. 在例 3.2.4 中, 容易验证

$$R_{(a)}(\emptyset) = 0 \quad (a \in [0, 1)); \qquad R_{(a)}(\{x\}) = \begin{cases} 0, & a \in [0.7, 1); \\ 1, & a \in [0, 0.7); \end{cases}$$

$$R_{(a)}(\{y\}) = \begin{cases} 0, & a \in [0.5, 1); \\ 1, & a \in [0, 0.5); \end{cases} \qquad R_{(a)}(\{z\}) = \begin{cases} 0, & a \in [0.3, 1); \\ 1, & a \in [0, 0.3); \end{cases}$$

$$R_{(a)}(\{x, y\}) = \begin{cases} 0, & a \in [0.7, 1); \\ 1, & a \in [0.5, 0.7); \\ 2, & a \in [0, 0.5); \end{cases}$$

$$R_{(a)}(\{x,z\}) = \begin{cases} 0, & a \in [0.7,1); \\ 1, & a \in [0.3,0.7); \\ 2, & a \in [0,0.3); \end{cases}$$

$$R_{(a)}(\{y,z\}) = \begin{cases} 0, & a \in [0.5,1); \\ 1, & a \in [0,0.5); \end{cases}$$

$$R_{(a)}(E) = \begin{cases} 0, & a \in [0.7,1); \\ 1, & a \in [0.5,0.7); \\ 2, & a \in [0,0.5); \end{cases}$$

由

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A,a) = \{x \in E : R_{(a)}(A) = R_{(a)}(A \cup x)\},$$

得

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\emptyset,a) = \begin{cases} E, & a \in [0.7,1); \\ \{y,z\}, & a \in [0.5,0.7); \\ \{z\}, & a \in [0.3,0.5); \\ \emptyset, & a \in [0,0.3); \end{cases}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\{x\},a) = \begin{cases} E, & a \in [0.5,1); \\ \{x,z\}, & a \in [0.3,0.5); \\ \{x\}, & a \in [0,0.3); \end{cases}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\{y\},a) = \begin{cases} E, & a \in [0.7,1); \\ \{y,z\}, & a \in [0,0.7); \end{cases}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\{z\},a) = \begin{cases} E, & a \in [0.7,1); \\ \{y,z\}, & a \in [0.5,0.7); \\ \{z\}, & a \in [0,0.5); \end{cases}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\{x,z\},a)=\begin{cases} E, & a\in[0.5,1);\\ \{x,z\}, & a\in[0,0.5);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\{y,z\},a)=\begin{cases} E, & a\in[0.7,1);\\ \{y,z\}, & a\in[0,0.7);\end{cases}$$

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(\{x,y\},a)=\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(E,a)=E\ \ (a\in[0,1)).$$

我们可以验证 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}:2^E\times[0,1)\to 2^E$ 满足定理 4.1.3 是一个由 $(E,\mathcal{I})$ 所诱导的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子, 并且 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 实际上就等于在例 4.1.2 中的 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子 $\mathrm{cl}^{\beta}$. 下面由定理 4.1.5 我们可以得到映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}}:2^E\to[0,1]$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A) &= \bigvee\left\{a\in[0,1):A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset\right\}\\ &=\begin{cases} 0, & A\in\{E,\{y,z\}\};\\ 0.3, & A\in\{\{z\},\{x,z\}\};\\ 0.5, & A\in\{\{y\},\{x,y\}\};\\ 0.7, & A=\{x\};\\ 1, & A=\emptyset.\end{cases}\end{aligned}$$

显然 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}\mathcal{I}}=\mathcal{I}$ 且 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}}}^{\beta}=\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}$.

首先, 引入 $M$- 模糊化拟阵的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族.

**定义** 4.1.8. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**BETA**). 称映射 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族 ($M$-fuzzifying family of $\beta$-flats or $\beta$-closed sets), 如果 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 满足: $\forall a\in\beta(\top)$,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)=\left\{A\in 2^E:\forall e\in E-A,\ R_{(a)}(A\cup e)\neq R_{(a)}(A)\right\},\quad(4.1.4)$$

其中 $R_{(a)}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数.

**例** 4.1.9. 在例 4.1.7 中, 我们可以看到映射 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 具体可以表示如下

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)=\begin{cases}\{E,\{y,z\},\{x\}\} & a\in[0.,0.3);\\ \{E,\{y,z\},\{x,z\},\{z\}\} & a\in[0.3,0.5;\\ \{E,\{y,z\}\} & a\in[0.5,0.7);\\ \{E\} & a\in[0.7,1).\end{cases}$$

很容易验证 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族满足以下条件.

**命题** 4.1.10. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**BETA**). 则 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 满足以下条件. $\forall a\in\beta(\top)$,

**(FBF1)** $E\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBF2)** $A,B\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBF3)** 如果 $A\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$, 且 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}\subseteq\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 是 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 中真包含 $A$ 的所有极小元的全体, 那么

$$\bigcup_{i=1}^{k}(A_i-A)=E-A.$$

**(FBF4)**$\forall A\in 2^E$, 若 $\forall x\in A$, 有 $B_1\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 使得 $A-x\subseteq B_1$ 且 $x\notin B_1$, 当且仅当存在 $b\in\beta(\top)$ 满足 $a\in\beta(b)$, 且 $\forall x\in A$ 存在 $B_2\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(b)$ 使得 $A-x\subseteq B_2$ 且 $x\notin B_2$.

**证明** 设 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是由 $(E,\mathcal{I})$ 诱导的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子. 假设对任意 $x\in A$, 有 $B_1\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 使得 $A-x\subseteq B_1$ 且 $x\notin B_1$. 由定义式(**3.1.4**)可知, $x\notin\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A-x,a)$, 故 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A-x,a)\right)=\emptyset$.

由**(FBC5)**, 存在满足 $a \in \beta(b)$ 的 $b \in \beta(\top)$, 有

$$A \cap \left( \bigcap_{x \in A} (\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A - x, b) \right) = \emptyset,$$

于是 $x \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A - x, b)$. 从而, 存在 $B_2 = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A - x, b) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 且 $x \notin B_2$. 反之也是成立的. □

实际上, $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族也可以用其他形式来表示.

**命题** 4.1.11. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 则 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta} : \beta(\top) \to 2^{(2^E)}$ 还可以表示为: $\forall a \in \beta(\top)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a) &= \left\{ A \in 2^E : \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A, a) = A \right\} \\
&= \left\{ \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A, a) : A \in 2^E \right\} \\
&= \left\{ \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(B, a) : B \in \mathcal{I}_{(a)} \right\} \\
&= \left\{ \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(B, a) : B \cap \left( \bigcap_{x \in B} (\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}(B - x, a)) \right) = \emptyset \right\}.
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是由 $(E, \mathcal{I})$ 诱导的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子.

**定理** 4.1.12. 设 $E$ 是非空有限集合. 映射 $\mathcal{F}^{\beta} : \beta(\top) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件**(FBF1)-(FBF3)**和**(FBF4)**, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}})$ 使得 $\mathcal{F}^{\beta} = \mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}}}^{\beta}$.

**证明** 设映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{\beta}}^{\beta} : 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 定义式如下

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{\beta}}^{\beta}(A, a) = \bigcap \left\{ A_i \in \mathcal{F}^{\beta}(a) : A \subseteq A_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k \right\}.$$

如果我们想要证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}})$ 使得 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{\beta}}^{\beta}$ 是由 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}})$ 诱导的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子, 我们只需要验证映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{\beta}}^{\beta}$ 满足条件**(FBC1)-(FBC4)**及**(FBC5)**即可.

**(FBC1)** 由 $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}$ 的定义, 有 $A \subseteq \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a)$, 则(**FBC1**)成立.

**(FBC2)** 如果 $A \subseteq B \subseteq E$, 那么

$$A \subseteq \bigcap \{B_i \in \mathcal{F}^{\beta}(a) : B \subseteq B_i, \quad i = 1, 2, \cdots, t\} = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(B,a) \in \mathcal{F}^{\beta}(a).$$

故, $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a) \subseteq \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(B,a)$.

**(FBC3)** 设 $A_1 = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a)$, 则 $A_1 \in \mathcal{F}^{\beta}(a)$. 由 $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}$ 的定义, 有 $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A_1,a) \subseteq A_1$, 故 $A_1 = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A_1,a)$, 也就是,

$$\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a) = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a),a).$$

**(FBC4)** 如果 $y \in \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup x,a) - \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a)$, 则 $x \notin \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a)$. 设 $B = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a)$, 由(**FBF3**), 存在一个极小元 $B_1 \in \mathcal{F}^{\beta}(a)$ 使得 $B \subsetneq B_1$ 且 $x \in B_1 - B$. 从而, $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a) \subsetneq \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup x,a) \subseteq B_1$, 则有 $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup x,a) = B_1$. 另外, 由于

$$\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a) \subsetneq \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup y,a) \subseteq \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup x,a) = B_1,$$

所以有 $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup y,a) = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup x,a)$, 故 $x \in \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A \cup y,a)$.

下面证明(**FBC5**)成立.

**(FBC5)** 如果 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A - x,a)\right) = \emptyset$, 那么对任意的 $x \in A$, $x \notin \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A - x,a)$, 也就是存在 $B_1 = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A - x,a) \in \mathcal{F}^{\beta}(a)$ 使得 $A - x \subseteq B_1$ 并且 $x \notin B_1$. 由(**FBF4**), 存在 $b \in \beta(\top)$ 满足 $a \in \beta(b)$, 并且存在 $B_2 \in \mathcal{F}^{\beta}(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 并且 $x \notin B_2$, 也就是, $x \notin \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A - x,b)$. 故 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A - x,b)\right) = \emptyset$. 反之仍然成立.

由定理 4.1.5 可知, $M$- 模糊化 $\beta$- 闭包算子 $\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}$ 可以诱导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}})$ , 将其简化为 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}})$, 且

$\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}}} = \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}$. 由于

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\beta}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}}}(a) &= \left\{A \in 2^E : \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}}}(A,a) = A\right\} \\ &= \left\{A \in 2^E : \mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}(A,a) = A\right\} \\ &= \mathcal{F}^{\beta}(a). \end{aligned}$$

所以 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 闭集族

$$\mathcal{F}^{\beta}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}}}}(a) = \mathcal{F}^{\beta}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}}}(a) = \mathcal{F}^{\beta}(a).$$

□

由定理 4.1.6 和定理 4.1.12, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, 我们可以得到 $\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\beta}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{F}^{\beta}_{\mathcal{I}}}} = \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\beta}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$. 从而, 在 $M$- 模糊化拟阵族和 $M$- 模糊化 $\beta$ 闭集族的全体构成的集族之间可以建立起一一对应关系.

## 4.2 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子和 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族

下面介绍 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子.

**定义** 4.2.1. 设 $E$ 是非空有限集合. 称 $\mathrm{cl}^J : 2^E \times J(M) \to 2^E$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子, 如果 $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 且 $\forall a \in J(M)$, 有以下条件成立.

**(FJC1)** $A \subseteq \mathrm{cl}^J(A,a)$.

**(FJC2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{cl}^J(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^J(A,a)$.

**(FJC3)** $\mathrm{cl}^J(\mathrm{cl}^J(A,a),a)=\mathrm{cl}^J(A,a)$.

**(FJC4)** 如果 $y\in\mathrm{cl}^J(A\cup x,a)-\mathrm{cl}^J(A,a)$, 那么 $x\in\mathrm{cl}^J(A\cup y,a)$.

**(FJC5)** $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset\Leftrightarrow\forall b\in\beta^*(a)$, 有

$$A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,b)\right)=\emptyset.$$

**定理** 4.2.2. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 并且映射 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}:2^E\times J(M)\to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}(A,a)=\{x\in E:R_{[a]}(A)=R_{[a]}(A\cup x)\},\tag{4.2.1}$$

其中 $R_{[a]}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数. 则 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子.

**证明** 对于 $a\in J(M)$, 由定理 2.2.11, 可知 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}|_{2^E\times\{a\}}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 所对应的闭包算子. 由拟阵的闭包算子性质, 立即可得**(FJC1)**–**(FJC4)**成立. 另外可推知 $A\in\mathcal{I}_{[a]}$ (或 $R_{[a]}(A)=|A|$) 当且仅当 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}(A-x,a)\right)=\emptyset$. 因此由 $\mathcal{I}_{[a]}=\bigcap\limits_{b\in\beta(a)}\mathcal{I}_{[b]}$, 显然有**(FJC5)**成立. □

**引理** 4.2.3. 设 $E$ 是非空有限集合, $\mathrm{cl}^J:2^E\times J(M)\to 2^E$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子, 则 $\mathrm{cl}^J$ 满足以下条件: $\forall A\in 2^E$ 且 $\forall a\in J(M)$,

**(FJC6)** 存在 $B\subseteq A$ 使得 $\mathrm{cl}^J(A,a)=\mathrm{cl}^J(B,a)$,

$$B\cap\left(\bigcap_{x\in B}\mathrm{cl}^J(B-x,a)\right)=\emptyset,$$

且 $(B\cup y)\cap\left(\bigcap\limits_{x\in B\cup y}\mathrm{cl}^J(B\cup y-x,a)\right)\neq\emptyset$, 其中 $y\in\mathrm{cl}^J(B,a)-B$.

**(FJC7)** 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$ 那么 $(A\cup y)\cap\left(\bigcap_{x\in A\cup y}\mathrm{cl}^J(A\cup y-x,a)\right)\neq\emptyset$, 当且仅当 $y\in\mathrm{cl}^J(A,a)-A$.

**(FJC8)** 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么

$$\mathrm{cl}^J(A,a)=\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^J(A,b).$$

**证明** 因为 $\mathrm{cl}^J$ 满足(FJC1)-(FJC4)及(FJC5), 所以对于任意的 $a\in J(M)$, 存在一个拟阵 $(E,\mathcal{I}_a)$, 以 $\mathrm{cl}^J|_{2^E\times\{a\}}$ 作为其对应的闭包算子, 且 $A\in\mathcal{I}_a$ 当且仅当 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$. 所以由拟阵的闭包性质可以验证在 $(E,\mathcal{I}_a)$ 中(FJC6)和(FJC7)成立.

(FJC8) 设 $A\in 2^E$, $a\in J(M)$, 若 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$, 则 $A\in\mathcal{I}_a$. 令 $R_a$ 是 $(E,\mathcal{I}_a)$ 的秩函数. 则有 $R_a(A)=|A|$. 由(FJC5)可以推得 $\mathcal{I}_a=\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathcal{I}_b$.

一方面, 设 $x\in\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^J(A,b)-A$. 则存在 $b\in\beta(a)$ 使得 $R_b(A\cup x)=R_b(A)=|A|$. 所以 $A\cup x\notin\mathcal{I}_b$. 因此 $A\cup x\notin\mathcal{I}_a$. 从而 $(A\cup x)\cap\left(\bigcap_{y\in A\cup x}\mathrm{cl}^J(A\cup x-y,a)\right)\neq\emptyset$. 由(FJC7) 我们知道 $x\in\mathrm{cl}^J(A,a)$. 故有 $\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^J(A,b)\subseteq\mathrm{cl}^J(A,a)$.

另一方面, 如果 $x\in\mathrm{cl}^J(A,a)-A$, 那么 $R_a(A)=R_a(A\cup x)$, 也就是, $A\cup x\notin\mathcal{I}_a$. 由 $\mathcal{I}_a=\bigcap_{b\in\beta(a)}\mathcal{I}_b$, 存在 $b\in\beta(a)$ 使得 $A\cup x\notin\mathcal{I}_b$,

即 $(A\cup x)\cap\left(\bigcap\limits_{y\in A\cup x}\mathrm{cl}^J(A\cup x-y,b)\right)\neq\emptyset$. 则 $x\in\mathrm{cl}^J(A,b)$. 故有 $\bigcup\limits_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^J(A,b)\supseteq\mathrm{cl}^J(A,a)$.

因此 $\mathrm{cl}^J(A,a)=\bigcup\limits_{b\in\beta(a)}\mathrm{cl}^J(A,b)$ 成立. □

**定理** 4.2.4. 设 $\mathrm{cl}^J:2^E\times J(M)\to 2^E$ 是 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$-闭包算子. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}:2^E\to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(A)=\bigvee\left\{a\in J(M):A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset\right\}.\qquad(4.2.2)$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{cl}^J=\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}$.

**证明** 要想证明 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们只需要证明对任意的 $a\in J(M)$, 有

$$A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_{[a]}\Leftrightarrow A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset.\qquad(4.2.3)$$

一方面, 设 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(A)\geqslant a$, 则 $\forall b\in\beta^*(a)$, 都存在 $c\in J(M)$ 使得 $b\in\beta(c)$ 且 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,c)\right)=\emptyset$. 由(**FJC5**)逆向可以推知 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,b)\right)=\emptyset$. 从而 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$.

另一方面, 如果 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$, 由 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}$ 的定义式, 可得 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(A)\geqslant a$.

故 $A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_{[a]}\Leftrightarrow A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$.

因为 $\mathrm{cl}^J|_{2^E\times\{a\}}$ 满足(**FJC1**)-(**FJC4**)及(**FJC5**), 所以存在以 $\mathrm{cl}^J|_{2^E\times\{a\}}$ 为闭包算子的拟阵 $(E,(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_a)$, 且 $A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_a$ 当且仅

当 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^J(A-x,a)\right) = \emptyset$. 这也就证明了 $(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_a = (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_{[a]}$. 由定理 2.1.2, $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下面证明 $\mathrm{cl}^J = \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}$.

设 $A \in 2^E$, 由**(FJC6)**, 存在 $B \subseteq A$ 使得 $\mathrm{cl}^J(A,a) = \mathrm{cl}^J(B,a)$, $B \cap \left(\bigcap_{x\in B} \mathrm{cl}^J(B-x,a)\right) = \emptyset$, 并且对任意的 $y \in \mathrm{cl}^J(B,a) - B$, 有 $(B\cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in B\cup y} \mathrm{cl}^J(B\cup y-x,a)\right) \neq \emptyset$. 很容易得到 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(B) \geqslant a$ 且 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(B\cup y) \not\geqslant a$. 于是

$$|B| = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}})_{[a]}(B) \leqslant (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}})_{[a]}(B\cup y) < |B\cup y| = |B|+1,$$

也就证得了, $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}})_{[a]}(B) = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}})_{[a]}(B\cup y)$. 故 $y \in \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(B,a)$. 从而有 $\mathrm{cl}^J(A,a) = \mathrm{cl}^J(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(A,a)$.

另外, 对于拟阵 $\mathcal{M}_a = (E,(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_{[a]})$, 存在 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_a)$, 使得 $B = A\cap C$, 且 $\forall y \in \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(B,a) - B$, 有 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(A,a) = \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(B,a)$, $B \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_{[a]}$ 和 $B\cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J})_{[a]}$. 从而证明了 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(B) \geqslant a$ 且 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}(B\cup y) \not\geqslant a$, 也就是, 有 $B \cap \left(\bigcap_{x\in B} \mathrm{cl}^J(B-x,a)\right) = \emptyset$ 且

$$(B\cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in B\cup y} \mathrm{cl}^J(B\cup y-x,a)\right) \neq \emptyset.$$

所以由**(FJC7)**可知, $y \in \mathrm{cl}^J(B,a)$. 因此

$$\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(A,a) = \mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J}}(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^J(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^J(A,a).$$

□

**定理** 4.2.5. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$, 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J}(A) &= \bigvee\left\{a \in J(M) : A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A-x,a)\right) = \emptyset\right\} \\ &= \bigvee\left\{a \in J(M) : A \in \mathcal{I}_{[a]}\right\} \\ &= \bigvee\{a \in J(M) : \mathcal{I}(A) \geqslant a\} \\ &= \mathcal{I}(A).\end{aligned}$$

可证 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J} = \mathcal{I}$. □

下面引入 $M$- 模糊化拟阵的 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族.

**定义** 4.2.6. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们称映射 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族 ($M$-fuzzifying family of $J$-flats or $J$-closed sets), 若 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J$ 满足: $\forall a \in J(M)$,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a) = \left\{A \in 2^E : \forall e \in E - A,\ R_{[a]}(A \cup e) \neq R_{[a]}(A)\right\},$$

其中 $R_{[a]}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数.

很容易验证 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族满足以下条件.

**命题** 4.2.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足: $\forall a \in J(M)$,

**(FJF1)** $E \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$.

**(FJF2)** $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$.

**(FJF3)** 如果 $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 是 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 中真包含 $A$ 的所有极小元的全体, 那么 $\bigcup_{i=1}^{k}(A_i - A) = E - A$.

**(FJF4)** $\forall A \in 2^E$, 如果对任意的 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 使得 $A - x \subseteq B_1$ 并且 $x \notin B_1$, 当且仅当 $\forall b \in \beta(a)$, $\forall x \in A$ 都存在 $B_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 并且 $x \notin B_2$.

**证明** 我们只需要验证 (**FJF4**) 成立. 设 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的一个 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子. 假设对任意的 $x\in A$, 都存在 $B_1\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 使得 $A-x\subseteq B_1$ 且 $x\notin B_1$. 则 $x\notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A-x,a)$, 所以 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A-x,a)\right)=\emptyset$. 由(**FJC5**), $\forall b\in\beta(a)$ 有

$$A\cap\left(\bigcap_{x\in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A-x,b)\right)=\emptyset,$$

因此 $x\notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A-x,b)$. 也就是, 存在 $B_2=\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A-x,b)\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(b)$ 使得 $A-x\subseteq B_2$ 且 $x\notin B_2$. 此证明过程可逆. □

实际上, $M$- 模糊化 $J$- 闭集族也可以表示成其他形式.

**命题** 4.2.8. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J:J(M)\to 2^{(2^E)}$ 还可以表示为: $\forall a\in J(M)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^J(a) &= \left\{A\in 2^E:\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A,a)=A\right\}\\ &= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(A,a):A\in 2^E\right\}\\ &= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(B,a):B\in\mathcal{I}_{[a]}\right\}\\ &= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(B,a):B\cap\left(\bigcap_{x\in B}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J(B-x,a))\right)=\emptyset\right\}.\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^J$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子.

**定理** 4.2.9. 设 $E$ 是非空有限集合. 映射 $\mathcal{F}^J:J(M)\to 2^{(2^E)}$ 满足条件(**FJF1**)-(**FJF3**)和(**FJF4**), 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J})$ 使得 $\forall a\in J(M)$, $\mathcal{F}^J(a)=\mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J}}^J(a)$.

**证明** 设映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^J}^J:2^E\times J(M)\to 2^E$ 定义式如下

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^J}^J(A,a)=\bigcap\left\{A_i\in\mathcal{F}^J(a):A\subseteq A_i,\quad i=1,2,\cdots,k\right\}.$$

如果我们想要证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J})$ 使得 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}$ 是由 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J})$ 诱导的 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子, 我们只需要验证映射 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}$ 满足条件**(FJC1)**-**(FJC4)**及**(FJC5)**.

显然**(FJC1)**–**(FJC4)**是成立的. 下面只需要证明**(FJC5)**.

如果 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么对任意的 $x\in A$, 都有 $x\notin\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}(A-x,a)$, 也就是存在 $B_1=\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}(A-x,a)\in\mathcal{F}^J(a)$ 使得 $A-x\subseteq B_1$ 且 $x\notin B_1$. 由**(FJF4)**可知, $\forall b\in\beta(a)$, 都存在 $B_2\in\mathcal{F}^J(b)$ 使得 $A-x\subseteq B_2$ 并且 $x\notin B_2$, 也就是, $x\notin\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}(A-x,b)$. 故 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}(A-x,b)\right)=\emptyset$. 反之仍然成立.

由定理 4.2.4 可知, 由 $M$- 模糊化 $J$- 闭包算子 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}$ 可以诱导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}})$ , 将其简化为 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J})$, 且 $\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}=\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}$. 由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J}}(a) &= \left\{A\in 2^E:\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}(A,a)=A\right\}\\
&= \left\{A\in 2^E:\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}(A,a)=A\right\}\\
&= \mathcal{F}^J(a).
\end{aligned}
$$

所以 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J})$ 的 $M$- 模糊化 $J$- 闭集族

$$
\mathcal{F}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J_{\mathcal{F}^J}}}(a)=\mathcal{F}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J}}(a)=\mathcal{F}^J(a).
$$

□

由定理 4.2.5 和定理 4.2.9, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, 我们可以得到 $\mathcal{I}_{\mathcal{F}^J_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J_{(\mathcal{F}^J_{\mathcal{I}})}}=\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^J_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}$.

## 4.3 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子和 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族

下面介绍 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子的定义及其性质, 为了反映它与秩函数的水平之间的关系我们称其为 $\alpha$- 闭包算子.

**定义** 4.3.1. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}: 2^E \times \alpha(\perp) \to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a) = \left\{x \in E : R^{[a]}(A) = R^{[a]}(A \cup x)\right\}, \tag{4.3.1}$$

我们称映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 为由 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 所诱导出的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子, 简称 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子, 其中 $R^{[a]}$ 是拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的秩函数.

$M$- 模糊化拟阵所诱导的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子满足以下性质.

**命题** 4.3.2. 设 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha} : 2^E \times \alpha(\perp) \to 2^E$ 是由 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 诱导的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子. 则 $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 及 $\forall a \in \alpha(\perp)$, 有以下性质成立:

**(FAC1)** $A \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a)$.

**(FAC2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B,a) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a)$.

**(FAC3)** $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a),a) = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a)$.

**(FAC4)** 如果 $y \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A \cup x,a) - \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a)$, 那么 $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A \cup y,a)$.

**(FAC5)** $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x,a)\right) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x,b)\right) = \emptyset$, 其中 $b \in \alpha(\perp)$ 且 $a \in \alpha(b)$.

**证明** 显然 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}|_{2^E\times\{a\}}$ 是拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的闭包算子, 且 $A\in\mathcal{I}^{[a]}$ (或 $R^{[a]}(A)=|A|$) 当且仅当 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A-x,a)\right)=\emptyset$.

因此(FAC1)–(FAC4)显然成立. 另外, 由定理 1.2.4 中的 (5), 可知(FAC5)也成立. □

**引理** 4.3.3. 设 $E$ 是非空有限集合, 若 $\mathrm{cl}^{\alpha}:2^E\times\alpha(\perp)\to 2^E$ 满足条件(FAC1)-(FAC4)及(FAC5), 则 $\forall A\in 2^E$ 和 $\forall a\in\alpha(\perp)$, 以下条件成立.

**(FAC6)** 存在 $B\subseteq A$ 使得 $\mathrm{cl}^{\alpha}(A,a)=\mathrm{cl}^{\alpha}(B,a)$,

$$B\cap\left(\bigcap_{x\in B}\mathrm{cl}^{\alpha}(B-x,a)\right)=\emptyset,$$

且 $(B\cup y)\cap\left(\bigcap\limits_{x\in B\cup y}\mathrm{cl}^{\alpha}(B\cup y-x,a)\right)\neq\emptyset$, 其中 $y\in\mathrm{cl}^{\alpha}(B,a)-B$.

**(FAC7)** 如果 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么 $(A\cup y)\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A\cup y}\mathrm{cl}^{\alpha}(A\cup y-x,a)\right)\neq\emptyset$ 当且仅当 $y\in\mathrm{cl}^{\alpha}(A,a)-A$.

**(FAC8)** 如果 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么 $\mathrm{cl}^{\alpha}(A,a)=\bigcup\limits_{a\in\alpha(b)}\mathrm{cl}^{\alpha}(A,b)$.

**证明** 因为 $\mathrm{cl}^{\alpha}$ 满足条件(FAC1)-(FAC4)及(FAC5), 所以对 $a\in\alpha(\perp)$, 存在以 $\mathrm{cl}^{\alpha}|_{2^E\times\{a\}}$ 为闭包算子的拟阵 $(E,\mathcal{I}^{a})$, 且 $A\in\mathcal{I}^{a}$ 当且仅当 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right)=\emptyset$. 从而对 $(E,\mathcal{I}^{a})$, 有(FAC6)和(FAC7)成立.

**(FAC8)** 设 $A\in 2^E,\forall a\in\alpha(\perp)$, 若 $A\cap\left(\bigcap\limits_{x\in A}\mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right)=\emptyset$ 则有 $A\in\mathcal{I}^{a}$. 设 $R^{a}$ 是 $(E,\mathcal{I}^{a})$ 的秩函数, 则 $R^{a}(A)=|A|$. 由(FAC5)

可以推得 $\mathcal{I}^a = \bigcap_{a\in\alpha(b)} \mathcal{I}^b$. 因此 $A\in\mathcal{I}^b$, 故

$$A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^\alpha(A-x,b)\right)=\emptyset.$$

另外,

$$\begin{aligned}
& x\in \mathrm{cl}^\alpha(A,a)-A \\
\Leftrightarrow\ & (A\cup x)\cap\left(\bigcap_{y\in A\cup x}\mathrm{cl}^\alpha(A\cup x-y,a)\right)\neq\emptyset\ (\text{由 }(\mathbf{FAC7})) \\
\Leftrightarrow\ & A\cup x\notin\mathcal{I}^a \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\in\alpha(\perp),\ \text{使得 } a\in\alpha(b), A\cup x\notin\mathcal{I}^b \\
\Leftrightarrow\ & \exists b\in\alpha(\perp),\ \text{使得} \\
& a\in\alpha(b), (A\cup x)\cap\left(\bigcap_{y\in A\cup x}\mathrm{cl}^\alpha(A\cup x-y,b)\right)\neq\emptyset \\
\Leftrightarrow\ & x\in\bigcup_{a\in\alpha(b)}\mathrm{cl}^\alpha(A,b)-A.
\end{aligned}$$

因此(**FAC8**) 也成立. □

**定理** 4.3.4. 设 $\mathrm{cl}^\alpha: 2^E\times\alpha(\perp)\to 2^E$ 满足(**FAC1**)-(**FAC4**) 及(**FAC5**), 且 $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}: 2^E\to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}(A)=\bigwedge\left\{a\in\alpha(\perp): A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^\alpha(A-x,a)\right)\neq\emptyset\right\}. \quad (4.3.2)$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{cl}^\alpha=\mathrm{cl}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}$.

**证明** 由定理 2.1.6, 要证明 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 对任意的 $a\in\alpha(\perp)$ 我们只需要证明

$$A\notin(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha})^{[a]}\Leftrightarrow A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^\alpha(A-x,a)\right)\neq\emptyset. \quad (4.3.3)$$

一方面, 设 $A \notin (\mathcal{I}_{cl})^{[a]}$, 则有 $a \in \alpha(\mathcal{I}_{cl}(A))$. 所以存在着 $b \in \alpha(\perp)$ 使得 $a \in \alpha(b)$ 且 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,b)\right) \neq \emptyset$. 由**(FAC5)**, 有 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right) \neq \emptyset$.

另一方面, 设 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right) \neq \emptyset$, 则存在 $b \in \alpha(\perp)$ 使得 $a \in \alpha(b)$ 且 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,b)\right) \neq \emptyset$. 故

$$\begin{aligned} a &\in \alpha(b) \subseteq \bigcup_{a\in\alpha(b)} \alpha(b) = \alpha\left(\bigwedge\left\{b : A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,b)\right) \neq \emptyset\right\}\right) \\ &= \alpha(\mathcal{I}_{cl}(A)), \end{aligned}$$

即, $A \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{[a]}$. 从而 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{[a]} \Leftrightarrow A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right) \neq \emptyset$.

因为 $\mathrm{cl}^{\alpha}|_{2^E\times\{a\}}$ 满足**(FAC1)-(FAC4)**, 所以存在以 $\mathrm{cl}^{\alpha}|_{2^E\times\{a\}}$ 为闭包算子的分明拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{a})$. 且 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{a}$ 当且仅当 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^{\alpha}(A-x,a)\right) \neq \emptyset$. 故 $(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{a} = (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{[a]}$. 由定理 2.1.6 可证, $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

令 $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in \alpha(\perp)$, 下证 $\mathrm{cl}^{\alpha}(A,a) = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}}}(A,a)$.

由**(FAC6)** 和**(FAC7)**可知, 存在 $B \subseteq A$ 使得

$$\mathrm{cl}^{\alpha}(A,a) = \mathrm{cl}^{\alpha}(B,a), B \cap \left(\bigcap_{x\in B} \mathrm{cl}^{\alpha}(B-x,a)\right) = \emptyset,$$

且 $\forall y \in \mathrm{cl}^{\alpha}(B,a) - B$, $(B \cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in B\cup y} \mathrm{cl}^{\alpha}(B\cup y-x,a)\right) \neq \emptyset$. 很容易验证 $B \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{[a]}$ 并且 $B \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}})^{[a]}$. 于是

$$|B| = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}}})^{[a]}(B) \leqslant (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}}})^{[a]}(B\cup y) < |B\cup y| = |B| + 1,$$

也就是, $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}})^{[a]}(B) = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}})^{[a]}(B \cup y)$. 故证明了 $y \in \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(B,a)$. 从而 $\mathrm{cl}^\alpha(A,a) = \mathrm{cl}^\alpha(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(A,a)$.

此外, 由于存在 $B \in (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha})^{[a]}$ 使得 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(A,a) = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(B,a)$ 且 $B \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha})^{[a]}$, $y \in \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(B,a) - B$. 则 $B \cap \left( \bigcap_{x \in B} \mathrm{cl}^\alpha(B - x, a) \right) = \emptyset$ 和 $(B \cup y) \cap \left( \bigcap_{x \in B \cup y} \mathrm{cl}^\alpha(B \cup y - x, a) \right) \neq \emptyset$. 由条件(**FAC7**)可知, $y \in \mathrm{cl}^\alpha(B,a)$. 因此 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(A,a) = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha}}(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^\alpha(B,a) \subseteq \mathrm{cl}^\alpha(A,a)$. □

**定理** 4.3.5. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是 $M$- 模糊化拟阵, 则 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$, 由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha_{\mathcal{I}}}(A) &= \bigwedge \left\{ a \in \alpha(\perp) : A \cap \left( \bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^\alpha_{\mathcal{I}}(A - x, a) \right) \neq \emptyset \right\} \\
&= \bigwedge \left\{ a \in \alpha(\perp) : A \notin \mathcal{I}^{[a]} \right\} \\
&= \bigwedge \left\{ a \in \alpha(\perp) : a \in \alpha(\mathcal{I}(A)) \right\} \\
&= \mathcal{I}(A).
\end{aligned}
$$

所以 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^\alpha_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$. □

接下来我们引入 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族.

**定义** 4.3.6. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件(**ALPHA**). 称映射 $\mathcal{F}^\alpha_{\mathcal{I}} : \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族 ($M$-fuzzifying family of $\alpha$-flats or $\alpha$-closed sets), 如果 $\mathcal{F}^\alpha_{\mathcal{I}}$ 满足: $\forall a \in \alpha(\perp)$,

$$
\mathcal{F}^\alpha_{\mathcal{I}}(a) = \left\{ A \in 2^E : \forall e \in E - A, \mathcal{R}^{[a]}(A \cup e) \neq R^{[a]}(A) \right\},
$$

其中 $R^{[a]}$ 是拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的秩函数.

很容易验证 $M$- 模糊化 $\alpha$ 闭集族满足以下条件. $\forall a \in \alpha(\perp)$

**(FAF1)** $E \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAF2)** 如果 $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$, 则 $A \cap B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAF3)** 如果 $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 是 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 中真包含 $A$ 的所有极小元的全体, 那么

$$\bigcup_{i=1}^{k}(A_i - A) = E - A.$$

**(FAF4)** $\forall A \in 2^E$, 如果对任意 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 使得 $A - x \subseteq B_1$ 且 $x \notin B_1$, 当且仅当对于满足 $a \in \alpha(b)$ 的 $b \in \alpha(\perp)$ 及 $\forall x \in A$, 都存在 $B_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 且 $x \notin B_2$.

**证明** 设 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$ 闭包算子. 假设对任意的 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 使得 $A - x \subseteq B_1$ 且 $x \notin B_1$. 则有 $x \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x, a)$, 故 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x, a)\right) = \emptyset$. 由**(FAC5)**, 对于满足 $a \in \alpha(b)$ 的 $b \in \alpha(\perp)$, 有 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x, b)\right) = \emptyset$, 则可知 $x \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x, b)$. 从而, 存在 $B_2 = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A - x, b) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 且 $x \notin B_2$. 反之也是成立的. □

实际上, $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族也可以用其他形式表示.

**命题** 4.3.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(ALPHA)**. 则 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha} : \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 还可以表示为:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) &= \left\{A \in 2^E : \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A, a) = A\right\} \\
&= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A, a) : A \in 2^E\right\} \\
&= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B, a) : B \in \mathcal{I}^{[a]}\right\} \\
&= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B, a) : B \cap \left(\bigcap_{x \in B}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B - x, a))\right) = \emptyset\right\}.
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子.

**定理** 4.3.8. 设 $E$ 是一个非空有限集合, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 映射 $\mathcal{F}^{\alpha}: \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件(**FAF1**)-(**FAF3**)及(**FAF4**), 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}})$ 使得 $\mathcal{F}^{\alpha} = \mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}}}$.

**证明** 设映射 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}: 2^E \times \alpha(\perp) \to 2^E$ 定义式如下

$$\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a) = \bigcap \{A_i \in \mathcal{F}^{\alpha}(a) : A \subseteq A_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k\}.$$

如果我们想要证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}})$ 使得 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}$ 是由 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}})$ 诱导的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子, 我们只需要验证映射 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}$ 满足条件(**FAC1**)-(**FAC4**)及(**FAC5**).

(**FAC1**) 由 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}$ 的定义, 有 $A \subseteq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a)$, 则(**FAC1**)成立.

(**FAC2**) 如果 $A \subseteq B \subseteq E$, 那么

$$A \subseteq \bigcap \{B_i \in \mathcal{F}^{\alpha}(a) : B \subseteq B_i, \quad i = 1, 2, \cdots, t\} = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(B, a) \in \mathcal{F}^{\alpha}(a).$$

故, $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a) \subseteq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(B, a)$.

(**FAC3**) 设 $A_1 = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a)$, 则 $A_1 \in \mathcal{F}^{\alpha}(a)$. 由 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}$ 的定义, 有 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A_1, a) \subseteq A_1$, 故 $A_1 = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A_1, a)$, 也就是,

$$\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a) = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a), a).$$

(**FAC4**)如果 $y \in \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup x, a) - \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a)$, 那么 $x \notin \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a)$. 设 $B = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a)$, 由(**FAF3**), 存在一个极小元 $B_1 \in \mathcal{F}^{\alpha}(a)$ 使得 $B \subsetneq B_1$ 并且 $x \in B_1 - B$. 从而, $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a) \subsetneq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup x, a) \subseteq B_1$, 则有 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup x, a) = B_1$. 另外, 我们知道

$$\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A, a) \subsetneq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup y, a) \subseteq \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup x, a) = B_1,$$

所以有 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup y, a) = \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup x, a)$, 故 $x \in \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A \cup y, a)$.

**(FAC5)** 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么对任意的 $x\in A$, $x\notin \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A-x,a)$, 也就是存在 $B_1=\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A-x,a)\in\mathcal{F}^{\alpha}(a)$ 使得 $A-x\subseteq B_1$ 并且 $x\notin B_1$. 由(**FAF4**), 对任意满足条件 $a\in\alpha(b)$ 的 $b\in\alpha(\perp)$, 存在 $B_2\in\mathcal{F}^{\alpha}(b)$ 使得 $A-x\subseteq B_2$ 且 $x\notin B_2$, 也就是, $x\notin \mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A-x,b)$. 故 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A-x,b)\right)=\emptyset$. 反之仍然成立.

由定理 4.3.4 可知, 由 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭包算子 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}$ 可以诱导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}})$ , 将其简化为 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}})$, 且 $\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}}=\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}$. 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}}}(a) &= \left\{A\in 2^{E}:\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}}(A,a)=A\right\}\\ &= \left\{A\in 2^{E}:\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}(A,a)=A\right\}\\ &= \mathcal{F}^{\alpha}(a).\end{aligned}$$

所以对于 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 闭集族 $\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{F}^{\alpha}}}}(a)=\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}}}(a)=\mathcal{F}^{\alpha}(a)$. □

由定理 4.3.5 和定理 4.3.8, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, 我们可以得到 $\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}_{(\mathcal{F}^{\alpha}_{\mathcal{I}})}}=\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^{\alpha}_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}$.

## 4.4 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子和 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族

最后我们给出 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子和 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族的定义.

**定义** 4.4.1. 设 $E$ 是非空有限集合. 称 $\mathrm{cl}^P: 2^E \times P(M) \to 2^E$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子, 如果对于任意的 $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 和 $\forall a \in P(M)$ 满足以下条件.

**(FPC1)** $A \subseteq \mathrm{cl}^P(A, a)$.

**(FPC2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{cl}^P(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^P(A, a)$.

**(FPC3)** $\mathrm{cl}^P(\mathrm{cl}^P(A, a), a) = \mathrm{cl}^P(A, a)$.

**(FPC4)** 如果 $y \in \mathrm{cl}^P(A \cup \{x\}, a) - \mathrm{cl}^P(A, a)$, 那么 $x \in \mathrm{cl}^P(A \cup \{y\}, a)$.

**(FPC5)** $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^P(A - x, a)\right) = \emptyset \Leftrightarrow \exists b \in P(M)$ 使得 $b \in \alpha(a)$ 且 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^P(A - x, b)\right) = \emptyset$.

**定理** 4.4.2. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 定义映射 $\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}: 2^E \times P(M) \to 2^E$ 如下

$$\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}(A, a) = \left\{x \in E : R^{(a)}(A) = R^{(a)}(A \cup x)\right\}, \tag{4.4.1}$$

其中 $R^{(a)}$ 是 $(E, \mathcal{I}^{(a)})$ 的秩函数. 则 $\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}$ 是一个 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子.

**证明** 显然 $\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}|_{2^E \times \{a\}}$ 是截拟阵 $(E, \mathcal{I}^{(a)})$ 的闭包算子, 并且 $A \in \mathcal{I}^{(a)}$ (或 $R^{(a)}(A) = |A|$) 当且仅当 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}(A - x, a)\right) = \emptyset$. 因此(FPC1)-(FPC4) 成立. 另外, 由 $\mathcal{I}^{(a)} = \bigcup_{b \in \alpha(a)} \mathcal{I}^{(b)}$ 可以推得(FPC5)也成立. □

**引理** 4.4.3. 设 $\mathrm{cl}^P : 2^E \times P(M) \to 2^E$ 是集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子, 则 $\mathrm{cl}^P$ 满足以下条件: $\forall A \in 2^E$ 及 $\forall a \in P(M)$,

**(FPC6)** 存在 $B \subseteq A$ 使得 $\mathrm{cl}^P(A,a) = \mathrm{cl}^P(B,a)$, 且
$B \cap \left(\bigcap_{x\in B} \mathrm{cl}^P(B-x,a)\right) = \emptyset$, $(B\cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in B\cup y} \mathrm{cl}^P(B\cup y - x,a)\right) \neq \emptyset$,
其中 $y \in \mathrm{cl}^P(B,a) - B$.

**(FPC7)** 如果 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^P(A-x,a)\right) = \emptyset$, 那么
$(A\cup y) \cap \left(\bigcap_{x\in A\cup y} \mathrm{cl}^P(A\cup y - x,a)\right) \neq \emptyset$ 当且仅当 $y \in \mathrm{cl}^P(A,a) - A$.

**(FPC8)** 如果 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^P(A-x,a)\right) = \emptyset$, 那么
$\mathrm{cl}^P(A,b) = \bigcap_{a\in\alpha(b)} \mathrm{cl}^P(A,a)$.

**证明** 因为 $\mathrm{cl}^P$ 满足(FPC1)-(FPC4)及(FPC5), 则对任意 $a \in P(M)$, 存在一个拟阵 $(E,\mathcal{I}^a)$, 以 $\mathrm{cl}^P|_{2^E\times\{a\}}$ 为闭包算子, 且 $A \in \mathcal{I}^a$ 当且仅当 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^P(A-x,a)\right) = \emptyset$. 从而(FPC6)和(FPC7) 成立.

**(FPC8)** $A \in 2^E, a \in P(M)$, 若 $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^P(A-x,a)\right) = \emptyset$, 则有 $A \in \mathcal{I}^a$. 令 $R^a$ 是 $(E,\mathcal{I}^a)$ 的秩函数, 则 $R^a(A) = |A|$. 由(FPC5)可得 $\mathcal{I}^b = \bigcup_{a\in\alpha(b)} \mathcal{I}^a$, 所以 $A \in \mathcal{I}^b$, 即, $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} \mathrm{cl}^P(A-x,b)\right) = \emptyset$.

由于

$$
\begin{aligned}
& x \in \mathrm{cl}^P(A,b) - A \\
\Leftrightarrow\ & (A\cup\{x\})\cap\left(\bigcap_{y\in A\cup\{x\}} \mathrm{cl}^P(A\cup\{x\}-y,b)\right)\neq\emptyset \ (\text{由} A\in\mathcal{I}^b) \\
\Leftrightarrow\ & A\cup x\notin\mathcal{I}^b \\
\Leftrightarrow\ & \forall a\in\alpha(b),\ A\cup x\notin\mathcal{I}^a \\
\Leftrightarrow\ & \forall a\in\alpha(b),\ (A\cup\{x\})\cap\left(\bigcap_{y\in A\cup\{x\}} \mathrm{cl}^P(A\cup\{x\}-y,a)\right)\neq\emptyset \\
\Leftrightarrow\ & x\in\bigcap_{a\in\alpha(b)} cl(A,a)-A.\quad \text{由 (FPC7)}.
\end{aligned}
$$

所以(**FPC8**)成立. □

**定理** 4.4.4. 设 $\mathrm{cl}^P: 2^E\times P(M)\to 2^E$ 是集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}: 2^E\to M$ 如下

$$
\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}(A)=\bigwedge\left\{a\in P(M): A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,a)\right)\neq\emptyset\right\}. \tag{4.4.2}
$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵且 $\mathrm{cl}^P=\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}$.

**证明** 要证明 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 对任意的 $a\in P(M)$, 只需要证明

$$
A\notin(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}\Leftrightarrow A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,a)\right)\neq\emptyset. \tag{4.4.3}
$$

若 $A\notin(\mathcal{I}_{cl})^{(a)}$, 则有 $\mathcal{I}_{cl}(A)\le a$. 对于任意的 $b\in\alpha(a)$, 存在 $c\in P(M)$ 使得 $b\in\alpha(c)$ 且 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,c)\right)\neq\emptyset$, 可以推得 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,b)\right)\neq\emptyset$. 由(**FPC5**), $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,a)\right)\neq\emptyset$.

反之, 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,a)\right)\neq\emptyset$, 那么 $\mathcal{I}_{cl}(A)\leq a$, 也就是, $A\notin(\mathcal{I}_{cl})^{(a)}$.

所以 $A\notin(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}\Leftrightarrow A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,a)\right)\neq\emptyset$.

因为 $\mathrm{cl}^P|_{2^E\times\{a\}}$ 满足**(FPC1)-(FPC4)**, 故存在拟阵 $(E,(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^a)$ 以 $\mathrm{cl}^P|_{2^E\times\{a\}}$ 为闭包算子且 $A\notin(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^a$ 当且仅当

$$A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}^P(A-x,a)\right)\neq\emptyset.$$

也就说明了 $(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^a=(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}$ 由定理 2.1.2, 可以证明 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下证 $\mathrm{cl}^P=\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}$.

由**(FPC6)** 和**(FPC7)**可知, 设 $A\in 2^E$, 存在 $B\subseteq A$ 使得 $\mathrm{cl}^P(A,a)=\mathrm{cl}^P(B,a)$, $B\cap\left(\bigcap_{x\in B}\mathrm{cl}^P(B-x,a)\right)=\emptyset$, 且对任意的 $y\in\mathrm{cl}^P(B,a)-B$, $(B\cup\{y\})\cap\left(\bigcap_{x\in B\cup\{y\}}\mathrm{cl}^P(B\cup\{y\}-x,a)\right)\neq\emptyset$. 故 $B\in(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}$ 且 $B\cup\{y\}\notin(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}$. 于是

$$|B|=(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}})^{(a)}(B)\leqslant(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}})^{(a)}(B\cup\{y\})<|B\cup\{y\}|=|B|+1,$$

也就是, $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}})^{(a)}(B)=(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}})^{(a)}(B\cup\{y\})$, 故 $y\in\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(B,a)$. 所以 $\mathrm{cl}^P(A,a)=\mathrm{cl}^P(B,a)\subseteq\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(B,a)\subseteq\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(A,a)$.

反之, 在 $(E,(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)})$ 中必然存在一个基 $C$, 令 $B=A\cap C$, 使得 $\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(A,a)=\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(B,a)$ 且 $B\in(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}$, 而且对于任意的 $y\in\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(B,a)-B$, $B\cup\{y\}\notin(\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P})^{(a)}$. 所以我们可以推得 $B\cap\left(\bigcap_{x\in B}\mathrm{cl}^P(B-x,a)\right)=\emptyset$ 且

$$(B \cup \{y\}) \cap \left( \bigcap_{x \in B \cup \{y\}} \mathrm{cl}^P(B \cup \{y\} - x, a) \right) \neq \emptyset.$$

由(**FPC7**)可知, $y \in \mathrm{cl}^P(B, a)$. 因此,

$$\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(A, a) = \mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P}}(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^P(B, a) \subseteq \mathrm{cl}^P(A, a).$$

□

**定理** 4.4.5. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则有 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$, 由于

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}}(A) &= \bigwedge \left\{ a \in P(M) : A \cap \left( \bigcap_{x \in A} \mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}(A - x, a) \right) \neq \emptyset \right\} \\ &= \bigwedge \left\{ a \in P(M) : A \notin \mathcal{I}^{(a)} \right\} \\ &= \bigwedge \{ a \in P(M) : \mathcal{I}(A) \leq a \} \\ &= \mathcal{I}(A). \end{aligned}$$

所以 $\mathcal{I}_{\mathrm{cl}^P_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$. □

最后介绍 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族概念.

**定义** 4.4.6. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵. 我们称映射 $\mathcal{F}^P_{\mathcal{I}} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族 ($M$-fuzzifying family of $P$-flats or $P$-closed sets) 满足: $\forall a \in P(M)$,

$$\mathcal{F}^P_{\mathcal{I}}(a) = \left\{ A \in 2^E : \forall e \in E - A,\ R^{(a)}(A \cup e) \neq R^{(a)}(A) \right\},$$

其中 $R^{(a)}$ 是拟阵 $(E, \mathcal{I}^{(a)})$ 的秩函数.

由上述内容很容易验证 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族满足以下条件.

**(FPF1)** $E \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$.

**(FPF2)** $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$.

**(FPF3)** 如果 $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 是 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 中真包含 $A$ 的所有极小元的全体, 那么

$$\bigcup_{i=1}^{k}(A_i - A) = E - A.$$

**(FPF4)** $\forall a \in P(M)$ , $\forall A \in 2^E$, 如果对任意的 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 使得 $A - x \subseteq B_1$ 且 $x \notin B_1$, 当且仅当存在满足 $b \in \alpha(a)$ 的 $b \in P(M)$, 且存在 $B_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 且 $x \notin B_2$.

**证明** 设 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子. 假设对任意的 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 使得 $A - x \subseteq B_1$ 且 $x \notin B_1$. 则 $x \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A - x, a)$, 故 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A - x, a)\right) = \emptyset$. 由**(FPC5)**, 存在满足 $b \in \alpha(a)$ 的 $b \in P(M)$, 有 $A \cap \left(\bigcap_{x \in A}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A - x, b)\right) = \emptyset$, 可以推知 $x \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A - x, b)$. 从而, 存在 $B_2 = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A - x, b) \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(b)$ 使得 $A - x \subseteq B_2$ 且 $x \notin B_2$. 反之也成立. □

实际上, $M$- 模糊化 $P$- 闭集族也可以表示为以下几种形式.

**命题** 4.4.7. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化 $P$ 闭集族 $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 还可以表示为: $\forall a \in P(M)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}(a) &= \left\{A \in 2^E : \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A, a) = A\right\} \\
&= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A, a) : A \in 2^E\right\} \\
&= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(B, a) : B \in \mathcal{I}^{(a)}\right\} \\
&= \left\{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(B, a) : B \cap \left(\bigcap_{x \in B}(\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(B - x, a))\right) = \emptyset\right\}.
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子.

**定理** 4.4.8. 设 $E$ 是非空有限集合. 映射 $\mathcal{F}^{P}:P(M)\to 2^{(2^{E})}$ 满足条件(FPF1)-(FPF3)及(FPF4), 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{P}})$ 使得 $\mathcal{F}^{P}=\mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{P}}}^{P}$.

**证明** 设映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}:2^{E}\times P(M)\to 2^{E}$ 定义式如下

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}(A,a)=\bigcap\left\{A_{i}\in\mathcal{F}^{P}(a):A\subseteq A_{i},\quad i=1,2,\cdots,k\right\}.$$

如果要证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{P}})$ 使得 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{P}})$ 的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子, 我们只需要验证映射 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}$ 满足条件(FPC1)-(FPC4)及(FPC5).

显然(FPC1)-(FPC4)成立. 故只需验证(FPC5)成立即可.

(FPC5) 如果 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}(A-x,a)\right)=\emptyset$, 那么对于任意的 $x\in A$, $x\notin\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}(A-x,a)$, 也就是存在 $B_{1}=\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}(A-x,a)\in\mathcal{F}^{P}(a)$ 使得 $A-x\subseteq B_{1}$ 并且 $x\notin B_{1}$. 由(FPF4), 存在 $b\in\alpha^{*}(a)$, 使得存在着 $B_{2}\in\mathcal{F}^{P}(b)$ 满足 $A-x\subseteq B_{2}$ 并且 $x\notin B_{2}$, 也就是, $x\notin\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}(A-x,b)$. 故 $A\cap\left(\bigcap_{x\in A}\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}(A-x,b)\right)=\emptyset$. 此过程可逆, 所以(FPC5)成立.

由定理 4.4.4 可知, 由 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子 $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}$ 可以诱导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $\left(E,\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}}\right)$, 简单记为 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{P}})$, 并且 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}=\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}$. 所以 $\forall a\in P(M)$, $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{F}^{P}}^{P}}}^{P}(a)=\mathcal{F}_{\mathcal{I}_{\mathcal{F}^{P}}}^{P}(a)=\mathcal{F}^{P}(a)$. □

由定理 4.4.5 和定理 4.4.8, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, 我们可以得到 $\mathcal{I}_{\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P}}=\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{(\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^{P})}^{P}}=\mathcal{I}_{\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}}=\mathcal{I}$. 综上所述, 在 $M$- 模糊化拟阵族和 $M$- 模糊化 $P$- 闭集族的全体构成的集族之间可以建立起一一对应关系.

## 4.5 $M$- 模糊化 $\beta$ 内部算子和 $M$- 模糊化 $\beta$-开集族

首先给出拟阵理论中的开集定义如下 [43].

**定义** 设 $E$ 是一个非空有限集合, 且集族 $O \subseteq 2^E$ 为拟阵 $\mathcal{M}=(E,I)$ 的开集族的充分必要条件是 $O$ 满足以下的性质:

**(O1)** $\emptyset \in O$.

**(O2)** 如果 $X_1, X_2 \in O$, 则 $X_1 \cup X_2 \in O$.

**(O3)** 如果 $X \in O$, 且 $\{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$ 是全体真包含在 $X$ 中属于 $O$ 的极大子集的集合, 那么 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} X_i = \emptyset$.

下面我们引入拟阵的内部算子.

**定义**[24] 设 $E$ 是非空有限集合, $(E,I)=\mathcal{M}$ 是一个拟阵. 映射 $\mathrm{In}: 2^E \to 2^E$ 是拟阵 $M$ 的内部算子, 如果 In 满足以下条件:

**(N1)** $\mathrm{In}(A) \subseteq A$.

**(N2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{In}(B) \subseteq \mathrm{In}(A)$.

**(N3)** $\mathrm{In}(\mathrm{In}(A)) = \mathrm{In}(A)$.

**(N4)** 如果 $x, y \in A$, 且 $y \in \mathrm{In}(A) - \mathrm{In}(A-x)$, 那么 $x \notin \mathrm{In}(A-y)$.

对于拟阵的内部算子有以下性质成立.

在拟阵 $\mathcal{M}=(E,I)$ 中, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在 $B \supseteq A$, 使得 $\mathrm{In}(B)=\mathrm{In}(A)$ 且 $B' \in I$, 同时对任意的 $y \in B - \mathrm{In}(B)$, 有 $B' \cup y \notin I$.

在拟阵中, 内部算子和闭包算子之间有着密不可分的关系. 所以我们在 $M$- 模糊化闭包算子的基础上, 引入 $M$- 模糊化内部算子的概念. 同样的当我们在研究 $M$- 模糊化内部算子时, 也根据 $M$- 模糊化拟阵的截拟阵的不同给出与截拟阵

相对应的四种不同的 $M$- 模糊化内部算子分别为 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子, $M$- 模糊化 $J$- 内部算子, $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子, $M$- 模糊化 $P$- 内部算子, 它们统称为 $M$- 模糊化内部算子. 而且他们分别与 $M$- 模糊化拟阵之间可以建立起一一对应关系.

开集其实质为拟阵内满足条件 $\text{In}(A) = A$ 的子集. 同样我们可以借鉴 $M$- 模糊化闭集族的研究方法来讨论 $M$- 模糊化开集族. 我们统称 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族、$M$- 模糊化 $J$- 开集族、$M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族、$M$- 模糊化 $P$- 开集族为 $M$- 模糊化开集族.

首先, 我们引入 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子.

**定义** 4.5.1. 设 $E$ 为非空有限集合, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 称映射 $\text{In}^\beta : 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子, 如果 $\text{In}^\beta$ 满足以下条件, $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 及 $\forall a \in \beta(\top)$,

**(FBN1)** $\text{In}^\beta(A, a) \subseteq A$.

**(FBN2)** $B \subseteq A \Rightarrow \text{In}^\beta(B, a) \subseteq \text{In}^\beta(A, a)$.

**(FBN3)** $\text{In}^\beta(\text{In}^\beta(A, a), a) = \text{In}^\beta(A, a)$.

**(FBN4)**$\forall x, y \in A$, 如果 $y \in \text{In}^\beta(A, a) - \text{In}^\beta(A - x, a)$, 那么 $x \notin \text{In}^\beta(A - y, a)$.

**(FBN5)**$\forall x \in A$, $A \cap \text{In}^\beta(A' \cup x, a) = \{x\}$ 当且仅当 $\exists b \in \beta(\top)$ 使得 $a \in \beta(b)$ 且 $\forall x \in A$, $A \cap \text{In}^\beta(A' \cup x, b) = \{x\}$.

**定理** 4.5.2. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 定义映射 $\text{In}_{\mathcal{I}}^\beta : 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 如下: $\forall a \in \beta(\top)$ 及 $\forall A \in 2^E$,

$$\text{In}_{\mathcal{I}}^\beta(A, a) = \left\{x \in E : R_{(a)}(A') \neq R_{(a)}(A' \cup x)\right\} \tag{4.5.1}$$

其中 $R_{(a)}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数, 则 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是集合 $E$ 上的一个 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子.

**证明** $\forall a \in \beta(\top)$, $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}|_{2^E\times\{a\}}$ 是某个拟阵的内部算子, 所以直接推得**(FBN1)-(FBN4)**成立, 证明的关键是验证**(FBN5)**成立. 由于 $R_{(a)}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数我们可以推得下面的等价式

$$A \in \mathcal{I}_{(a)} \Leftrightarrow \forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^{\beta}(A' \cup x, a) = \{x\}.$$

由定理 1.2.4 中的 (4), 可知 (FBN5) 成立. □

**引理** 4.5.3. $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子满足以下条件: $\forall A \in 2^E$ 及 $\forall a \in \beta(\top)$,

**(FBN6)** 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^{\beta}(B,a) = \mathrm{In}^{\beta}(A,a)$, 且 $\forall x \notin B$, $x \in \mathrm{In}^{\beta}(B\cup x, a)$, 对任意的 $y \in B - \mathrm{In}^{\beta}(B,a)$, $\exists x_0 \notin B - y$ 使得 $x_0 \notin \mathrm{In}^{\beta}(B\cup x_0 - y, a)$.

**(FBN7)** 若 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{\beta}(A'\cup x, a)$, 则存在 $x_1 \in A \cup y$ 使得 $x_1 \notin \mathrm{In}^{\beta}(A' \cup x_1 - y, a) \Leftrightarrow y \in A' - \mathrm{In}^{\beta}(A', a)$(或$y \notin \mathrm{In}^{\beta}(A',a) \cup A$).

**(FBN8)** 若 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{\beta}(A'\cup x, a)$, 则有

$$\mathrm{In}^{\beta}(A', b) = \bigcup_{b \in \beta(a)} \mathrm{In}^{\beta}(A', a).$$

**证明** 设映射 $\mathrm{In}^{\beta} : 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 满足条件 **(FBN1)** – **(FBN4)** 及 **(FBN5)**. $\forall a \in \beta(\top)$, 由拟阵的内部算子定义, 存在一个拟阵 $(E,\mathcal{I}_a)$ 使得 $\mathrm{In}^{\beta}|_{2^E\times\{a\}}$ 是它的内部算子, 且 $A \in \mathcal{I}_a$ 当且仅当 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{\beta}(A' \cup x, a)$. 则**(FBN6)**和**(FBN7)**显然成立. 下证**(FBN8)**也成立.

**(FBN8)** $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in \beta(\top)$, 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $x \in \mathrm{In}^{\beta}(A' \cup x, a)$, 那么 $A \in \mathcal{I}_a$, 即 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{\beta}(A'\cup x, a)$.

设 $R_a$ 是 $(E,\mathcal{I}_a)$ 的秩函数, 则 $R_a(A)=|A|$, 由(**FBN5**)我们知道 $\mathcal{I}_b=\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathcal{I}_a$. 所以 $A\in\mathcal{I}_b$, 可推得 $\forall x\in A, x\in \mathrm{In}^\beta(A'\cup x,b)$.

另外, 设 $x\notin\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathrm{In}^\beta(A',a)$ 及 $x\notin A$, 则对于每一个满足 $b\in\beta(a)$ 的 $a\in\beta(\top)$ 都有 $x\in A'-\mathrm{In}^\beta(A',a)$. 由(**FBN7**)知, 存在 $y_0\in A\cup x$ 使得 $y_0\notin\mathrm{In}^\beta((A\cup x)'\cup y_0,a)$, 则 $A\cup x\notin\mathcal{I}_a$, 故 $A\cup x\notin\mathcal{I}_b$. 所以存在 $y_1\in A\cup x$ 使得 $y_1\notin\mathrm{In}^\beta((A\cup x)'\cup y_1,b)=\mathrm{In}^\beta(A'\cup y_1-x,b)$, 由(**FBN7**)又得 $x\notin\mathrm{In}^\beta(A',b)\cup A$.

上述证明可逆, 所以可以得到 $\mathrm{In}^\beta(A',b)=\bigcup_{b\in\beta(a)}\mathrm{In}^\beta(A',a)$.

□

**定理** 4.5.4. 设 $\mathrm{In}^\beta:2^E\times\beta(\top)\to 2^E$ 是集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子, $M$ 满足条件 (**BETA**). 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}:2^E\to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}(A)=\bigvee\left\{a\in\beta(\top):\forall x\in A, A\cap\mathrm{In}^\beta(A'\cup x,a)=\{x\}\right\}.$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{In}^\beta=\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}$.

**证明** 我们只需要证明对任意的 $a\in\beta(\top)$, 有

$$A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}\Leftrightarrow\forall x\in A, A\cap\mathrm{In}^\beta(A'\cup x,a)=\{x\}.$$

若 $a\in\beta(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}(A))$, 则存在 $b\in\beta(\top)$ 使得 $a\in\beta(b)$ 且 $\forall x\in A$, $A\cap\mathrm{In}^\beta(A'\cup x,b)=\{x\}$. 由(**FBN5**), $\forall x\in A, A\cap\mathrm{In}^\beta(A'\cup x,a)=\{x\}$. 反之仍然成立.

故 $A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}\Leftrightarrow\forall x\in A, A\cap\mathrm{In}^\beta(A'\cup x,a)=\{x\}$.

由于 $\mathrm{In}^\beta|_{2^E\times\{a\}}$ 满足(**FBN1**)-(**FBN4**), 则有拟阵 $(E,(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_a)$ 以 $\mathrm{In}^\beta|_{2^E\times\{a\}}$ 为内部算子, 则 $A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_a$ 当且仅当 $\forall x\in A, A\cap$

$\mathrm{In}^\beta(A' \cup x, a) = \{x\}$, 所以有 $(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_a = (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}$. 由定理 2.1.4, 则 $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下面我们验证 $\mathrm{In}^\beta = \mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}$.

由**(FBN6)**及**(FBN7)**可知, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^\beta(B, a) = \mathrm{In}^\beta(A, a)$, 且 $\forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}^\beta(B \cup x, a) = \{x\}$, 且同时对任意的 $y \notin \mathrm{In}^\beta(B, a)$ 且 $y \in B$, 存在 $x_0 \in B' \cup y$ 使得 $x_0 \notin \mathrm{In}^\beta(B \cup x_0 - y, a) = \mathrm{In}^\beta((B' \cup y)' \cup x_0, a)$. 由此可以验证 $B' \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}, B' \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}$, 于是

$$|B'| = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}})_{(a)}(B') \leq (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}})_{(a)}(B' \cup y) < |B' \cup y| = |B'| + 1,$$

所以 $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}})_{(a)}(B') = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}})_{(a)}(B' \cup y)$, 即 $y \notin \mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(B, a)$, 这说明, $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(B, a) \subseteq \mathrm{In}^\beta(B, a)$. 因此

$$\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(A, a) \subseteq \mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(B, a) \subseteq \mathrm{In}^\beta(B, a) = \mathrm{In}^\beta(A, a).$$

另外, 由拟阵的内部算子性质可知, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(B, a) = \mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(A, a)$, 且对任意的 $y \notin \mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(B, a)$ 并且 $y \in B$, 都有 $B' \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}, B' \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta})_{(a)}$, 从而 $\forall x \notin B$, $B' \cap \mathrm{In}^\beta(B \cup x, a) = \{x\}$, 与此同时存在着 $x_1 \in B' \cup y$ 使得 $(B' \cup y) \cap \mathrm{In}^\beta(B \cup x_1 - y, a) = \emptyset$,. 由**(FBN7)**可知, $y \notin \mathrm{In}^\beta(B, a)$. 则 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(A, a) = \mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(B, a) \supseteq \mathrm{In}^\beta(B, a) \supseteq \mathrm{In}^\beta(A, a)$.

所以对任意的 $A \in 2^E$ 及 $\forall a \in \beta(\top)$, $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta}}(A, a) = \mathrm{In}^\beta(A, a)$. □

**定理** 4.5.5. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 映射 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}} : 2^E \times \beta(\top) \to 2^E$ 是由 $(E, \mathcal{I})$ 诱导出的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子, 则有 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** 对任意的 $A \in 2^E$, 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A) &= \bigvee\left\{a \in \beta(\top) : \forall x \in A, A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A' \cup x, a) = \{x\}\right\} \\ &= \bigvee\{a \in \beta(\top) : A \in \mathcal{I}_{(a)}\} \\ &= \bigvee\{a \in \beta(\top) : a \in \beta(\mathcal{I}(A))\} \\ &= \mathcal{I}(A).\end{aligned}$$

故 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}} = \mathcal{I}$. □

下面介绍 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族.

**定义** 4.5.6. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**BETA**). 称映射 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta} : \beta(\top) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族, 其定义如下: $\forall a \in \beta(\top)$,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a) = \left\{A \in 2^E : \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A, a) = A\right\}.$$

其中 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子.

**命题** 4.5.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**BETA**). 则 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta} : \beta(\top) \to 2^{(2^E)}$ 满足: $\forall a \in \beta(\top)$,

**(FBO1)** $\emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBO2)** $A, B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBO3)** 如果 $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 中真包含在 $A$ 内的属于 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 的极大子集的集合, 那么 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_1 = \emptyset$.

**(FBO4)** $\forall x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 当且仅当存在 $b \in \beta(\top)$ 使得 $a \in \beta(b)$, 且 $\forall x \in A$ 都存在 $B_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$.

**证明** (**FBO1**)-(**FBO3**) 显然是成立的. 下证(**FBO4**)也成立.

设 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子. 假设对任意的 $x\in A$, 都存在 $B_1\in\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 使得 $B_1\subseteq A'\cup x$ 且 $x\in B_1$, 则 $x\in\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A'\cup x,a)$, 所以 $A\cap\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A'\cup x,a)=\{x\}$. 由**(FBN5)**可得, 存在 $b\in\beta(\top)$ 使得 $a\in\beta(\top)$ 且 $A\cap\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A'\cup x,b)=\{x\}$, 从而 $x\in\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A'\cup x,b)$, 由**(FBN3)**知, 存在 $B_2=\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A'\cup x,b)\in\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(b)$ 使得 $B_2\subseteq A'\cup x$ 且 $x\in B_2$. 反之仍然成立. □

为了后续证明的需要, 我们给出 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族的多个定义式.

**命题** 4.5.8. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 则 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 满足:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a) &= \left\{A\in 2^E:\forall x\in A, R_{(a)}(A')\neq R_{(a)}(A'\cup x)\right\}\\ &= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(A,a):A\in 2^E\right\}\\ &= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(B,a):B'\in\mathcal{I}_{(a)}\right\}\\ &= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(B,a):\forall x\notin B, B'\cap\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}(B\cup x,a)=\{x\}\right\}.\end{aligned}$$

其中, $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子, $R_{(a)}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数.

**定理** 4.5.9. 设 $E$ 是一个非空有限集合, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 令映射 $\mathcal{O}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 满足**(FBO1)**-**(FBO3)**及**(FBO4)**. 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\beta}})$ 使得

$$\forall a\in\beta(\top),\mathcal{O}^{\beta}(a)=\mathcal{O}_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\beta}}}^{\beta}(a).$$

**证明** 设映射 $\mathrm{In}_{\mathcal{O}^{\beta}}^{\beta}:2^E\times\beta(\top)\to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{In}_{\mathcal{O}^{\beta}}^{\beta}(A,a)=\bigcup\left\{A_i\in\mathcal{O}^{\beta}(a):A_i\subseteq A,i=1,2,\cdots,k\right\}. \qquad (4.5.2)$$

要想证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta})$, 只需证明 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta})$ 的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子, 故只要证明 $\forall a\in\beta(\top)$ 及 $\forall A\in 2^E$, 映射 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}$ 满足(FBN1)-(FBN4)及(FBN5)即可.

**(FBN1)** 由 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}$ 的定义式显然有 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)\subseteq A$.

**(FBN2)** 设 $B\in 2^E$ 满足 $A\subseteq B$, 则 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)\subseteq A\subseteq B$. 又根据(FBO2)和定义式(3.5.2)可以推得, $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)\in\mathcal{O}^\beta(a)$, 故 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)\subseteq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(B,a)$.

**(FBN3)** 由于 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)\in\mathcal{O}^\beta(a)$, 故

$$\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)\subseteq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a),a),$$

又由(FBN1)知, $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)=\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a),a)$.

**(FBN4)** $\forall x,y\in A$, 如果 $y\in\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)-\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-x,a)$, 那么 $x\in\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)$, 由(FBO3)知, 存在一个真包含在 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)$ 中的极大子集 $A_1\subsetneq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)$ 使得 $x\notin A_1$, 则有

$$A_1\subseteq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-x,a)\subsetneq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a),$$

故 $A_1=\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-x,a)$. 又 $y\notin\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-x,a)$, 则

$$A_1=\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-x,a)\subseteq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-y,a)\subsetneq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a),$$

由(FBO3)可知, $A_1=\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-y,a)$, 所以 $x\notin\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A-y,a)$.

**(FBN5)**设对于任意的 $x\in A$, $A\cap\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A'\cup x,a)=\{x\}$, 则 $x\in\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A'\cup x,a)$ 又由(FBO2)知 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A'\cup x,a)\in\mathcal{O}^\beta(a)$, 故由(FBO4), 有 $b\in\beta(\top)$ 且 $a\in\beta(b)$, 存在 $B_2\in\mathcal{O}^\beta(b)$ 使得 $B_2\subseteq A'\cup x$ 且 $x\in B_2$. 故 $B_2\subseteq\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A'\cup x,b)$, 所以 $x\in\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A'\cup x,b)$, 即 $A\cap\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A'\cup x,b)=\{x\}$.

由定理4.5.4可间接推得, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}})$, 其对应的 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子 $\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}}=\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}$. 实际上, 也就得

到 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta})=(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}})$. 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta}}(a) &= \left\{A\in 2^E:\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}}(A,a)=A\right\}\\ &= \left\{A\in 2^E:\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}(A,a)=A\right\}\\ &= \mathcal{O}^\beta(a).\end{aligned}$$

所以 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta})$ 所对应的 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族就是 $\mathcal{O}^\beta$. 也就是, 对任意 $a\in\beta(\top)$, 有 $\mathcal{O}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{O}^\beta}}}(a)=\mathcal{O}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta}}(a)=\mathcal{O}^\beta(a)$. □

由定理 4.5.5 和定理 4.5.9, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, $M$ 满足条件 (**BETA**), 可以得到以下结论

$$\mathcal{I}_{\mathcal{O}^\beta_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta(\mathcal{O}^\beta_{\mathcal{I}})}=\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\beta_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}.$$

所以在一个有限集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵族和所有 $M$- 模糊化 $\beta$- 开集族的全体构成的集族之间可以建立一一对应.

## 4.6 $M$- 模糊化 $J$ 内部算子和 $M$- 模糊化 $J$- 开集族

首先, 介绍 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子及其相关性质.

**定义** 4.6.1. 设 $E$ 为非空有限集合, 称 $\mathrm{In}^J:2^E\times J(M)\to 2^E$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子, 如果 $\mathrm{In}^J$ 满足以下条件.

$\forall A,B\in 2^E$, $\forall x,y\in E$ 及 $\forall a\in J(M)$,

**(FJN1)** $\mathrm{In}^J(A,a) \subseteq A$.

**(FJN2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{In}^J(B,a) \subseteq \mathrm{In}^J(A,a)$.

**(FJN3)** $\mathrm{In}^J(\mathrm{In}^J(A,a),a) = \mathrm{In}^J(A,a)$.

**(FJN4)** $\forall x,y \in A$, 如果 $y \in \mathrm{In}^J(A,a) - \mathrm{In}^J(A-x,a)$, 那么 $x \notin \mathrm{In}^J(A-y,a)$.

**(FJN5)**$\forall x \in A$, $A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x,a) = \{x\}$ 当且仅当 $\forall b \in \beta^*(a)$ 满足 $\forall x \in A$, $A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x,b) = \{x\}$.

**定理** 4.6.2. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 定义映射 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}: 2^E \times J(M) \to 2^E$ 如下

$$\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(A,a) = \left\{x \in E : R_{[a]}(A') \neq R_{[a]}(A' \cup x)\right\},$$

其中 $R_{[a]}$ 是拟阵 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数, 则 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子.

**证明** 在拟阵中(N1)-(N4)成立, 所以 $\forall a \in J(M)$ 显然可以推知(FJN1)-(FJN4)对 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}$ 是成立的, 证明的关键是验证(FJN5)成立. 由于 $R_{[a]}$ 是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数我们可以推得下面的等价式

$$A \in \mathcal{I}_{[a]} \Leftrightarrow \forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x,a) = \{x\}.$$

由定理 1.2.4 中的 (3), 可知(FJN5)成立. □

**引理** 4.6.3. 一个 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子还满足以下条件: $\forall A \in 2^E$ 及 $\forall a \in J(M)$,

**(FJN6)** 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^J(B,a) = \mathrm{In}^J(A,a)$, 且对任意的 $x \notin B, x \in \mathrm{In}^J(B \cup x,a)$, 同时 $\forall y \in B - \mathrm{In}^J(B,a)$ 存在 $x_0 \notin B - y$ 使得 $x_0 \notin \mathrm{In}^J(B \cup x_0 - y,a)$.

**(FJN7)** 如果 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^J(A' \cup x, a)$, 那么存在 $x_1 \in A \cup y$ 使得 $x_1 \notin \mathrm{In}^J(A' \cup x_1 - y, a) \Leftrightarrow y \notin \mathrm{In}^J(A', a) \cup A$.

**(FJN8)**如果 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^J(A' \cup x, a)$, 那么
$\mathrm{In}^J(A', a) = \bigcap\limits_{b \in \beta(a)} \mathrm{In}^J(A', b)$.

**证明** 设映射 $\mathrm{In}^J : 2^E \times J(M) \to 2^E$ 满足条件 (FJN1) – (FJN4) 及 (FJN5), 则 $\forall a \in J(M)$, 可以推证 $\mathrm{In}^J|_{2^E \times \{a\}}$ 是某个拟阵 $(E, \mathcal{I}_a)$ 的内部算子, 且

$$A \in \mathcal{I}_a \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in \mathrm{In}^J(A' \cup x, a).$$

故(FJN6)和(FJN7)在拟阵 $(E, \mathcal{I}_a)$ 中是成立的.

**(FJN8)** $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in J(M)$, 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $x \in \mathrm{In}^J(A' \cup x, a)$, 那么 $A \in \mathcal{I}_a$. 设 $R_a$ 是 $(E, \mathcal{I}_a)$ 的秩函数, 则 $R_a(A) = |A|$, 由(FJN5)可知, $\mathcal{I}_a = \bigcap\limits_{b \in \beta(a)} \mathcal{I}_b$. 所以 $\forall b \in \beta(a)$ 有 $A \in \mathcal{I}_b$.

设 $x \notin \bigcap\limits_{b \in \beta(a)} \mathrm{In}^J(A', b)$ 且 $x \notin A$, 则可知存在 $b \in \beta(a)$ 使得 $x \in A' - \mathrm{In}^J(A', b)$. 由性质(FJN7)知, 存在着 $y_0 \in A \cup x$ 使得 $y_0 \notin \mathrm{In}^J((A \cup x)' \cup y_0, b)$, 又由(FJN5)可以得到

$$(A \cup x) \cap \mathrm{In}^J((A \cup x)' \cup y, a) = \emptyset,$$

由(FJN7)可知, $x \notin \mathrm{In}^J(A', a) \cup A$.

反之也成立, 所以可以得到 $\mathrm{In}^J(A', a) = \bigcap\limits_{b \in \beta(a)} \mathrm{In}^J(A', b)$. □

**定理** 4.6.4. 设 $\mathrm{In}^J : 2^E \times J(M) \to 2^E$ 是集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J} : 2^E \to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}(A) = \bigvee \left\{a \in J(M) : \forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, a) = \{x\}\right\}. \tag{4.6.1}$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{In}^J = \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}$.

**证明** 我们只需要证明对于任意的 $a \in J(M)$, 有

$$A \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]} \Leftrightarrow \forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, a) = \{x\}.$$

设 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}(A) \geq a$, 则 $\forall b \in \beta^*(a)$ 存在 $c \in J(M)$ 使得 $b \in \beta^*(c)$ 且 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, c) = \{x\}$, 由(FJN5)可以推知

$$\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, b) = \{x\},$$

再次应用(FJN5)可知, $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, a) = \{x\}$. 反之, 若 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, a) = \{x\}$, 由定义式(3.6.1), 显然 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}(A) \geq a$, 故 $A \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]}$.

由于 $\mathrm{In}^J|_{2^E \times \{a\}}$ 满足(FJN1)-(FJN4)及(FJN5), 则存在拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_a)$ 以 $\mathrm{In}^J|_{2^E \times \{a\}}$ 为内部算子, 则 $A \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_a$ 当且仅当 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J(A' \cup x, a) = \{x\}$, 所以有 $(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_a = (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]}$. 由定理 2.1.2, $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下证 $\mathrm{In}^J = \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}$.

一方面, $\forall a \in J(M)$ 及 $\forall A \in 2^E$, 由(FJN6)可以推知, 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^J(B, a) = \mathrm{In}^J(A, a)$, 且对任意的 $x \notin B$,

$$B' \cap \mathrm{In}^J(B \cup x, a) = \{x\},$$

故 $B' \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]}$. $\forall y \notin \mathrm{In}^J(B, a) \cup B'$, 由(FJN7), 有 $x_0 \in B' \cup y$ 使得 $x_0 \notin \mathrm{In}^J(B \cup x_0 - y, a) = \mathrm{In}^J((B' \cup y)' \cup x_0, a)$, 则 $B' \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]}$, 从而由拟阵的性质可得

$$|B'| = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}})_{[a]}(B') \leq (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}})_{[a]}(B' \cup y) < |B' \cup y| = |B'| + 1,$$

有 $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}})_{[a]}(B') = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}})_{[a]}(B' \cup y)$, 故 $y \notin \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(B, a)$, 因此, $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(B, a) \subseteq \mathrm{In}^J(B, a)$. 则

$$\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(A, a) \subseteq \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(B, a) \subseteq \mathrm{In}^J(B, a) = \mathrm{In}^J(A, a).$$

另一方面, 由拟阵的内部算子性质可知, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在着 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(B,a) = \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(A,a)$, 且对于任意的 $y \in B - \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(B,a)$, 且有 $B' \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]}, B' \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J})_{[a]}$, 从而有 $\forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}^J(B \cup x, a) = \{x\}$, 且同时对任意的 $y \in B - \mathrm{In}^J(B,a)$, 存在 $x_1 \in B' \cup y$ 使得 $(B' \cup y) \cap \mathrm{In}^J(B \cup x_1 - y, a) = \emptyset$, 故 $y \in \mathrm{In}^J(B,a)$. 则 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(A,a) = \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(B,a) \supseteq \mathrm{In}^J(B,a) \supseteq \mathrm{In}^J(A,a)$.

所以对任意的 $A \in 2^E$ 及 $\forall a \in J(M)$, $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J}}(A,a) = \mathrm{In}^J(A,a)$.

□

**定理** 4.6.5. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们称映射 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}} : 2^E \times J(M) \to 2^E$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子, 则 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** 对任意的 $A \in 2^E$, 由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}}(A) &= \bigvee \left\{a \in J(M) : \forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(A' \cup x, a) = \{x\}\right\} \\
&= \bigvee \left\{a \in J(M) : A \in \mathcal{I}_{[a]}\right\} \\
&= \bigvee \{a \in J(M) : \mathcal{I}(A) \geq a\} \\
&= \mathcal{I}(A).
\end{aligned}
$$

故 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$. □

下面介绍 $M$- 模糊化 $J$- 开集族.

**定义** 4.6.6. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们称映射 $\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}} : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 开集族, 其定义如下

$$
\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}}(a) = \left\{A \in 2^E : \forall x \in A, R_{[a]}(A') \neq R_{[a]}(A' \cup x)\right\}.
$$

其中 $R_{[a]}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{[a]})$ 的秩函数.

**命题** 4.6.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化 $J$- 开集族 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}: J(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足: $\forall a \in J(M)$ 且 $\forall A \in 2^E$

**(FJO1)** $\emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$.

**(FJO2)** $A, B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$.

**(FJO3)** 如果 $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$ 中真包含在 $A$ 内的属于 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$ 的极大子集的集合, 那么 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_1 = \emptyset$.

**(FJO4)** $\forall x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 当且仅当 $\forall b \in \beta(a)$, 对任意的 $x \in A$ 都存在 $B_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$.

**证明** 由拟阵的开集性质, **(FJO1)-(FJO3)**显然是成立的. 下面只需验证**(FJO4)**也成立.

设 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子, 由 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$ 的定义式很容易验证

$$A \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a) \Leftrightarrow A = \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(A, a).$$

若 $\forall x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 则可知 $x \in \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(B_1, a) \subseteq \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(A' \cup x, a)$, 所以 $A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(A' \cup x, a) = \{x\}$. 由**(FJN5)**可得, $\forall b \in \beta(a)$ 满足 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(A' \cup x, b) = \{x\}$, 从而 $x \in \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(A' \cup x, b)$, 即存在 $B_2 = \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{J}(A' \cup x, b) \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{J}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$. 反之仍然成立. □

下面给出 $M$- 模糊化 $J$- 开集族的其它定义式.

**命题** 4.6.8. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化

$J$- 开集族 $\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}}: J(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}}(a) &= \{A \in 2^E : \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(A,a) = A\} \\ &= \{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(A,a) : A \in 2^E\} \\ &= \{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(B,a) : B' \in \mathcal{I}_{[a]}\} \\ &= \{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(B,a) : \forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(B \cup x, a) = \{x\}\}.\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}$ 是 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子.

**定理** 4.6.9. 设 $E$ 是非空有限集合, 令 $\mathcal{O}^J : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足(FJO1)-(FJO3)及(FJO4). 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J})$ 使得 $\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J}} = \mathcal{O}^J$.

**证明** 设映射 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J} : 2^E \times J(M) \to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A,a) = \bigcup \{A_i \in \mathcal{O}^J(a) : A_i \subseteq A, i = 1,2,\cdots,k\}. \tag{4.6.2}$$

我们只需证明 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}$ 是集合 $E$ 的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子, 则由定理 4.6.4 可以证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J})$. 显然映射 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}$ 满足(FJN1)-(FJN4), 下证(FJN5)成立.

(FJN5)设 $\forall x \in A$, $A \cap \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A' \cup x, a) = \{x\}$. 则 $x \in \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A' \cup x, a)$. 由(FJO2)知 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A' \cup x, a) \in \mathcal{O}^J(a)$, 故满足(FJO4)的前提条件, 所以 $\forall b \in \beta(a)$, 有 $B_2 \in \mathcal{O}^J(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$. 故有 $B_2 \subseteq \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A' \cup x, b)$, 所以 $x \in \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A' \cup x, b)$, 即 $A \cap \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A' \cup x, b) = \{x\}$.

由定理 4.6.4 可间接推得, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}})$, 其对应的 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子 $\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}} = \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}$. 实际上, 也就得到 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J}) = (E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}})$. 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J}}(a) &= \{A \in 2^E : \mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}(A,a) = A\} \\ &= \{A \in 2^E : \mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}(A,a) = A\} \\ &= \mathcal{O}^J(a).\end{aligned}$$

所以 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J})$ 所对应的 $M$- 模糊化 $J$- 开集族就是 $\mathcal{O}^J$. 也就是, 对于任意 $a \in J(M)$, 有

$$\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{O}^J}}}(a) = \mathcal{O}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J}}(a) = \mathcal{O}^J(a).$$

□

由定理 4.6.5 和定理 4.6.9, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, 我们可以得到以下结论

$$\mathcal{I}_{\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}_{\mathrm{In}^J(\mathcal{O}^J_{\mathcal{I}})} = \mathcal{I}_{\mathrm{In}^J_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}.$$

所以在一个有限集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵族和 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 开集族全体所构成的集族之间可以建立一一对应, 任意的 $M$- 模糊化拟阵都存在唯一的 $M$- 模糊化 $J$- 开集族与之对应.

## 4.7 $M$- 模糊化 $\alpha$ 内部算子和 $M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族

下面引入 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子的定义.

**定义** 4.7.1. 设 $E$ 为非空有限集合, $M$ 满足条件 **(ALPHA)**. 称映射 $\mathrm{In}^\alpha : 2^E \times \alpha(\perp) \to 2^E$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子, 如果 $\mathrm{In}^\alpha$ 满足以下条件, $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 及 $\forall a \in \alpha(\perp)$.

**(FAN1)** $\mathrm{In}^\alpha(A,a) \subseteq A$.

**(FAN2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{In}^\alpha(B,a) \subseteq \mathrm{In}^\alpha(A,a)$.

**(FAN3)** $\mathrm{In}^{\alpha}(\mathrm{In}^{\alpha}(A,a),a)=\mathrm{In}^{\alpha}(A,a)$.

**(FAN4)** $\forall x,y\in A$, 若 $y\in\mathrm{In}^{\alpha}(A,a)-\mathrm{In}^{\alpha}(A-x,a)$, 则 $x\notin\mathrm{In}^{\alpha}(A-y,a)$.

**(FAN5)**$\forall x\in A$, $A\cap\mathrm{In}^{\alpha}(A'\cup x,a)=\{x\}$ 当且仅当对于满足 $a\in\alpha(b)$ 的 $b\in\alpha(\perp)$ 都有 $\forall x\in A$, $A\cap\mathrm{In}^{\alpha}(A'\cup x,b)=\{x\}$.

**定理** 4.7.2. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(ALPHA)**. 定义映射 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}:2^E\times\alpha(\perp)\to 2^E$ 如下

$$\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A,a)=\left\{x\in E:R^{[a]}(A')\neq R^{[a]}(A'\cup x)\right\},$$

其中 $R^{[a]}$ 是拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的秩函数, 则 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子.

**证明** 与 $M$- 模糊化 $\beta$- 内部算子和 $M$- 模糊化 $J$- 内部算子的证明方法相似, 可以很容易的推证下面得等价式成立.

$$A\in\mathcal{I}^{[a]}\Leftrightarrow\forall x\in A,A\cap\mathrm{In}^{\alpha}(A'\cup x,a)=\{x\}$$

从而, 由定理 1.2.4 中的 (5), 可知 (FAN5) 成立. □

**引理** 4.7.3. $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子有下列性质: $\forall A\in 2^E$ 及 $\forall a\in\alpha(\perp)$,

**(FAN6)**存在 $B\supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^{\alpha}(B,a)=\mathrm{In}^{\alpha}(A,a)$, 且对任意的 $x\notin B,x\in\mathrm{In}^{\alpha}(B\cup x,a)$, 同时对任意的 $y\in B-A$ 存在 $x_0\notin B-y$ 使得 $x_0\notin\mathrm{In}^{\alpha}(B\cup x_0-y,a)$.

**(FAN7)**如果对任意的 $A\in 2^E$, 都有 $\forall x\in A,x\in\mathrm{In}^{\alpha}(A'\cup x,a)$, 那么存在 $x_1\in A\cup y$ 使得 $x_1\notin\mathrm{In}^{\alpha}(A'\cup x_1-y,a)\Leftrightarrow y\notin\mathrm{In}^{\alpha}(A',a)\cup A$.

**(FAN8)** 若 $\forall x\in A,x\in\mathrm{In}^{\alpha}(A'\cup x,a)$, 则

$$\mathrm{In}^{\alpha}(A',a)=\bigcap_{a\in\alpha(b)}\mathrm{In}^{\alpha}(A',b).$$

**证明** 由 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子的基本性质可知存在一个拟阵 $(E,\mathcal{I}_a)$ 使得 $\mathrm{In}^\alpha|_{2^E\times\{a\}}$ 是它的内部算子, 且

$$A\in\mathcal{I}_a\Leftrightarrow\forall x\in A,x\in\mathrm{In}^\alpha(B'\cup x,a).$$

则**(FAN6)**和**(FAN7)**是成立的.

**(FAN8)** $\forall A\in 2^E$ 且 $\forall a\in\alpha(\perp)$, 如果对任意的 $x\in A$, 都有 $x\in\mathrm{In}^\alpha(A'\cup x,a)$, 那么 $A\in\mathcal{I}_a$. 设 $R_a$ 是 $(E,\mathcal{I}_a)$ 的秩函数, 则 $R_a(A)=|A|$, 由**(FAN5)**可知 $\mathcal{I}_b=\bigcup\limits_{b\in\beta(a)}\mathcal{I}_a$. 所以

$$A\in\mathcal{I}_b\Leftrightarrow\forall x\in A,x\in\mathrm{In}^\alpha(A'\cup x,b).$$

另外, 设 $x\notin\mathrm{In}^\alpha(A',a)$ 及 $x\notin A$. 由**(FAN7)**知, 存在 $y_0\in A\cup x$ 使得

$$y_0\notin\mathrm{In}^\alpha((A\cup x)'\cup y_0,a),$$

则 $(A\cup x)\cap\mathrm{In}^\alpha(A'\cup y_0-x,a)=\emptyset$. 由**(FAN5)**, 存在 $b\in\alpha(\perp)$ 且 $a\in\alpha(b)$ 使得 $(A\cup x)\cap\mathrm{In}^\alpha(A'\cup y_1-x,b)=\emptyset$, 其中 $y_1\in A\cup x$. 由**(FAN7)**$x\notin\mathrm{In}^\alpha(A',b)\cup A$, 所以,$x\notin\bigcap\limits_{a\in\alpha(b)}\mathrm{In}^\alpha(A',b)\cup A$.

上述证明是可逆的, 所以可以得到 $\mathrm{In}^\alpha(A',a)=\bigcap\limits_{a\in\alpha(b)}\mathrm{In}^\alpha(A',b)$.

□

**定理** 4.7.4. 设 $\mathrm{In}^\alpha:2^E\times\alpha(\perp)\to 2^E$ 是集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子. $M$ 满足条件 **(ALPHA)**. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}:2^E\to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}(A)=\bigwedge\{a\in\alpha(\perp):\exists x\in A,A\cap\mathrm{In}^\alpha(A'\cup x,a)=\emptyset\}.$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{In}^\alpha=\mathrm{In}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}$.

**证明** 我们只需要证明对于任意的 $a \in \alpha(\perp)$, 有

$$A \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]} \Leftrightarrow \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^\alpha(A' \cup x, a) = \emptyset.$$

因为

$$\begin{aligned} A \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]} \quad &\Leftrightarrow \quad a \in \alpha(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}(A)) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists b \in \alpha(\perp) \text{ 使得 } a \in \alpha(b) \text{ 且} \\ &\qquad \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^\alpha(A' \cup x, b) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^\alpha(A' \cup x, a) = \emptyset \text{ 由 } (\mathbf{FAN5}). \end{aligned}$$

由 $\mathrm{In}^\alpha|_{2^E \times \{a\}}$ 满足(**FAN1**)-(**FAN4**), 则存在拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^a)$ 以 $\mathrm{In}^\alpha|_{2^E \times \{a\}}$ 为内部算子, 则 $A \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^a$ 当且仅当

$$\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^\alpha(A' \cup x, a) = \{x\},$$

所以 $(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^a = (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]}$. 由定理 2.1.6, $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下面我们验证 $\mathrm{In}^\alpha = \mathrm{In}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}$.

由(**FAN6**)及(**FAN7**)可知, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^\alpha(B, a) = \mathrm{In}^\alpha(A, a)$, 且 $\forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}^\alpha(B \cup x, a) = \{x\}$, 且同时对任意的 $y \in B - \mathrm{In}^\alpha(B, a)$, 存在 $x_0 \in B' \cup y$ 使得

$$x_0 \notin \mathrm{In}^\alpha(B \cup x_0 - y, a) = \mathrm{In}^\alpha((B' \cup y)' \cup x_0, a).$$

由此可以验证 $B' \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]}, B' \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]}$, 于是

$$|B'| = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}})^{[a]}(B') \leq (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}})^{[a]}(B' \cup y) < |B' \cup y| = |B'| + 1,$$

所以 $(R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}})^{[a]}(B') = (R_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}})^{[a]}(B' \cup y)$, 即 $y \notin \mathrm{In}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(B, a)$, 这说明, $\mathrm{In}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(B, a) \subseteq \mathrm{In}^\alpha(B, a)$. 从而

$$\mathrm{In}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(A, a) \subseteq \mathrm{In}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(B, a) \subseteq \mathrm{In}^\alpha(B, a) = \mathrm{In}^\alpha(A, a).$$

另一方面, 由拟阵的内部算子性质可知, 对任意的 $A \in 2^E$, 存在着 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(B,a) = \mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(A,a)$, 且对于任意的 $y \in B - \mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(B,a)$, 有 $B' \in (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]}$ 和 $B' \cup y \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha})^{[a]}$, 从而可知 $\forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}^{\alpha}(B \cup x, a) = \{x\}$, 同时对任意的 $y \in B - \mathrm{In}^{\alpha}(B,a)$, 存在 $x_1 \in B' \cup y$ 使得 $(B' \cup y) \cap \mathrm{In}^{\alpha}(B \cup x_1 - y, a) = \emptyset$, 故 $y \in \mathrm{In}^{\alpha}(B,a)$. 则 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(A,a) = \mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(B,a) \supseteq \mathrm{In}^{\alpha}(B,a) \supseteq \mathrm{In}^{\alpha}(A,a)$.

所以 $\forall A \in 2^E$ 及 $\forall a \in \alpha(\perp)$, $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^\alpha}}(A,a) = \mathrm{In}^{\alpha}(A,a)$. □

**定理** 4.7.5. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 映射 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}} : 2^E \times \alpha(\perp) \to 2^E$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子, 则 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** 对于任意的 $A \in 2^E$, 由于

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}}(A) &= \bigwedge \{a \in \alpha(\perp) : \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}(A' \cup x, a) = \emptyset\} \\
&= \bigwedge \left\{a \in \alpha(\perp) : A \notin \mathcal{I}^{[a]}\right\} \\
&= \bigwedge \{a \in \alpha(\perp) : a \in \alpha(\mathcal{I}(A))\} \\
&= \mathcal{I}(A).
\end{aligned}
$$

所以 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$. □

**定义** 4.7.6. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 称映射 $\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}} : \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族, 其定义如下: $\forall a \in \alpha(\perp)$,

$$
\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}}(a) = \left\{A \in 2^E : \mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}(A,a) = A\right\},
$$

其中 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子.

**命题** 4.7.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 则 $M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族 $\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}} : \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 满足: $\forall a \in \alpha(\perp)$ 且 $\forall A \in 2^E$,

**(FAO1)** $\emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAO2)** $A, B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAO3)** 如果 $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 中真包含在 $A$ 内的属于 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 的极大子集的集合, 那么 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_1 = \emptyset$.

**(FAO4)** 对任意的 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 当且仅当对任意满足 $a \in \beta(b)$ 的 $b \in \alpha(\perp)$ 及 $\forall x \in A$, 都存在 $B_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$.

**证明** **(FAO1)-(FAO3)** 显然是成立的. 下证**(FAO4)**也成立.

设 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子, 设 $\forall x \in A$, 存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 则可知 $x \in \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A' \cup x, a)$, 所以 $A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A' \cup x, a) = \{x\}$. 由**(FAN5)**, $\forall b \in \alpha(\perp)$ 且 $a \in \alpha(b)$, 有 $A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A' \cup x, b) = \{x\}$, 从而有 $x \in \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A' \cup x, b)$, 即存在着 $B_2 = \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A' \cup x, b) \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$. 反之仍然成立. □

我们再给出 $M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族的其他描述方式.

**命题** 4.7.8. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(ALPHA)**. 则 $M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha} : \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 满足:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) &= \left\{A \in 2^E : \forall x \in A, R^{[a]}(A') \neq R^{[a]}(A' \cup x)\right\} \\
&= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(A, a) : A \in 2^E\right\} \\
&= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B, a) : B' \in \mathcal{I}^{[a]}\right\} \\
&= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B, a) : \forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(B \cup x, a) = \{x\}\right\}.
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 是 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子, $R^{[a]}$ 是截拟阵 $(E, \mathcal{I}^{[a]})$ 的秩函数.

**定理** 4.7.9. 设 $E$ 是非空有限集合, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 令映射 $\mathcal{O}^{\alpha}:\alpha(\perp)\to 2^{(2^E)}$ 满足(**FAO1**)-(**FAO3**)及(**FAO4**). 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}})$ 使得 $\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}}}=\mathcal{O}^{\alpha}$.

**证明** 设映射 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}:2^E\times\alpha(\perp)\to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A,a)=\bigcup\{A_i\in\mathcal{O}^{\alpha}(a):A_i\subseteq A,i=1,2,\cdots,k\}.$$

只需证存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}})$, 使得 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}})$ 的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子, 我们易验证 $\forall a\in\alpha(\perp)$ 且 $\forall A\in 2^E$, 映射 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}$ 是满足(**FAN1**)-(**FAN4**).

(**FAN5**)假设对任意的 $x\in A$, $A\cap\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A'\cup x,a)=\{x\}$, 则 $x\in\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A'\cup x,a)$. 又由(**FAO2**)知 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A'\cup x,a)\in\mathcal{O}^{\alpha}(a)$, 故满足(**FAO4**)的条件, 所以 $\forall b\in\alpha(\perp)$ 且 $a\in\alpha(b)$, 存在 $B_2\in\mathcal{O}^{\alpha}(b)$ 使得 $B_2\subseteq A'\cup x$ 并且 $x\in B_2$. 故有 $B_2\subseteq\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A'\cup x,b)$, 所以 $x\in\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A'\cup x,b)$, 即 $A\cap\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A'\cup x,b)=\{x\}$.

由定理 4.7.4 可间接推得, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}})$, $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 与其相对应的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子 $\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}=\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}$. 实际上, 也就得到 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}})=(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}})$. 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}}}(a) &= \{A\in 2^E:\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}(A,a)=A\}\\ &= \{A\in 2^E:\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}(A,a)=A\}\\ &= \mathcal{O}^{\alpha}(a).\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{O}^{\alpha}}}}(a)=\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}}}(a)=\mathcal{O}^{\alpha}(a)$. □

由定理 4.7.5 和定理 4.7.9, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I})$, 若 $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 我们也可以得到以下结论

$$\mathcal{I}_{\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}(\mathcal{O}^{\alpha}_{\mathcal{I}})}=\mathcal{I}_{\mathrm{In}^{\alpha}_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}.$$

所以一个有限集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵和 $M$- 模糊化 $\alpha$- 开集族之间可以相互刻画.

## 4.8 $M$- 模糊化 $P$ 内部算子和 $M$- 模糊化 $P$- 开集族

最后介绍 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子和 $M$- 模糊化 $P$- 开集族.

**定义** 4.8.1. 设 $E$ 为非空有限集合, 称 $\mathrm{In}^P : 2^E \times P(M) \to 2^E$ 为 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子, 如果 $\mathrm{In}^P$ 满足以下条件, $\forall A, B \in 2^E$, $\forall x, y \in E$ 及 $\forall a \in P(M)$.

**(FPN1)** $\mathrm{In}^P(A, a) \subseteq A$.

**(FPN2)** $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{In}^P(B, a) \subseteq \mathrm{In}^P(A, a)$.

**(FPN3)** $\mathrm{In}^P(\mathrm{In}^P(A, a), a) = \mathrm{In}^P(A, a)$.

**(FPN4)** $\forall x, y \in A$, 若 $y \in \mathrm{In}^P(A, a) - \mathrm{In}^P(A - x, a)$, 则 $x \notin \mathrm{In}^P(A - y, a)$.

**(FPN5)**$\forall x \in A$, $A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x, a) = \{x\}$ 当且仅当 $\exists b \in \alpha^*(a)$ 使得 $\forall x \in A$, $A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x, b) = \{x\}$.

**定理** 4.8.2. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 定义映射 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}} : 2^E \times P(M) \to 2^E$ 如下: $\forall A \in 2^E$ 及 $a \in P(M)$,

$$\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}(A, a) = \left\{x \in E : R^{(a)}(A') \neq R^{(a)}(A' \cup x)\right\}. \tag{4.8.1}$$

其中 $R^{(a)}$ 是拟阵 $(E,\mathcal{I}^{(a)})$ 的秩函数, 则 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$-模糊化 $P$- 内部算子.

**证明** 在拟阵中(FPN1)-(FPN4)显然成立, 下面验证(FPN5)成立.

假设 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^{P}(A' \cup x, a) = \{x\}$, 则

$$\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{P}(A' \cup x, a).$$

由定义式(3.8.1)知, $\forall x \in A, R^{(a)}(A - x) \neq R^{(a)}(A)$. 设 $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}$ 是由 $(E,\mathcal{I})$ 所诱导的 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子, 有

$$\forall x \in A, x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}^{P}(A - x, a).$$

由 $M$- 模糊化 $P$- 闭包算子的性质有 $A \in \mathcal{I}^{(a)}$. 又 $\mathcal{I}^{(a)} = \bigcup\limits_{b \in \alpha(a)} \mathcal{I}^{(b)}$, 则 $\exists b \in \alpha(a)$ 使得 $A \in \mathcal{I}^{(b)}$, 即

$$\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^{P}(A' \cup x, b) = \{x\}.$$

此证明过程可逆, 所以(FPN5)成立. □

**引理** 4.8.3. $M$- 模糊化 $\alpha$- 内部算子具有以下性质: $\forall A \in 2^{E}$ 及 $\forall a \in P(M)$,

**(FPN6)** 存在 $B \supseteq A$ 使得 $\mathrm{In}^{P}(B,a) = \mathrm{In}^{P}(A,a)$, 且对任意的 $x \notin B, x \in \mathrm{In}^{P}(B \cup x, a)$, 同时对任意的 $y \in B - \mathrm{In}^{P}(B,a)$ 存在 $x_0 \notin B - y$ 使得 $x_0 \notin \mathrm{In}^{P}(B \cup x_0 - y, a)$.

**(FPN7)**若 $\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{P}(A' \cup x, a)$, 则存在 $x_1 \in A \cup y$ 使得 $x_1 \notin \mathrm{In}^{P}(A' \cup x_1 - y, a) \Leftrightarrow y \notin \mathrm{In}^{P}(A', a) \cup A$.

**(FPN8)**$\forall x \in A, x \in \mathrm{In}^{P}(A' \cup x, a)$, 有 $\mathrm{In}^{P}(A', b) = \bigcup\limits_{a \in \alpha(b)} \mathrm{In}^{P}(A', a)$.

**证明** 设映射 $\mathrm{In}^P: 2^E \times P(M) \to 2^E$ 满足条件 (FPN1) – (FPN4) 及 (FPN5), 由拟阵的内部算子定义有一个拟阵 $(E, \mathcal{I}_a)$ 使得 $\mathrm{In}^P|_{2^E\times\{a\}}$ 是它的内部算子, 且

$$A \in \mathcal{I}_a \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in \mathrm{In}^P(B' \cup x, a).$$

则(FPN6)和(FPN7)显然成立. 下证(FPN8)也成立.

(FPN8)$\forall b \in P(M)$, 若 $x \notin \mathrm{In}^P(A', b)$ 且 $x \notin A$, 则 $\exists y_0 \in A \cup x$ 使得 $y_0 \notin \mathrm{In}^P((A\cup x)' \cup y_0, b)$, 由(FPN5), $\forall a \in \alpha(b)$, $\exists y_1 \in A \cup x$ 使得 $(A \cup x) \cap \mathrm{In}^P(A' \cup y_1 - x, a) = \emptyset$. 由(FPN7), $x \notin \mathrm{In}^P(A', a) \cup A$, 所以 $x \notin \bigcup\limits_{a\in\alpha(b)} \mathrm{In}^P(A', a)$.

上述证明是可逆的, 所以 $\mathrm{In}^P(A', b) = \bigcup\limits_{a\in\alpha(b)} \mathrm{In}^P(A', a)$. □

**定理** 4.8.4. 设 $\mathrm{In}^P: 2^E \times P(M) \to 2^E$ 是集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}: 2^E \to M$ 如下

$$\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}(A) = \bigwedge \left\{a \in P(M) : \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x, a) = \emptyset\right\}.$$

则 $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $\mathrm{In}^P = \mathrm{In}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}}$.

**证明** 我们只需要证明对任意的 $a \in P(M)$, 有

$$A \notin (\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})^{(a)} \Leftrightarrow \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x, a) = \emptyset.$$

设 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}(a) \le a$, 则

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}(a) \le a \quad &\Leftrightarrow \quad \forall b \in \alpha(a), \exists c \in \alpha(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}(A))\text{使得} \\
&\qquad b \in \alpha(c) \ \text{ 且 } \ \exists x \in A, A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x, c) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \forall b \in \alpha(a), \exists x_1 \in A, A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x_1, b) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x_2 \in A, A \cap \mathrm{In}^P(A' \cup x_2, a) = \emptyset.
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{In}^P|_{2^E\times\{a\}}$ 满足(**FPN1**)-(**FPN4**)及(**FPN5**), 则存在拟阵 $(E,(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})_a)$ 以 $\mathrm{In}^P|_{2^E\times\{a\}}$ 为内部算子, 从而 $A\in(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})_a$ 当且仅当 $\forall x\in A, A\cap\mathrm{In}^P(A'\cup x,a)=\{x\}$, 所以有 $(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})_a=(\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})^{(a)}$. 由定理 2.1.2, $(E,\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

我们验证 $\forall A\in 2^E$ 及 $\forall a\in P(M)$, $\mathrm{In}^P(A,a)=\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P}}(A,a)$ 的方法与上面三类 $M$- 模糊化内部算子的证明方法相类似. □

**定理** 4.8.5. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们称映射 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}:2^E\times P(M)\to 2^E$ 是由 $(E,\mathcal{I})$ 诱导出的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子, 则 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}$.

**证明** 对于任意的 $A\in 2^E$, 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}}(A) &= \bigwedge\left\{a\in P(M):\exists x\in A, A\cap\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}(A'\cup x,a)=\emptyset\right\}\\ &= \bigwedge\left\{a\in P(M):A\notin\mathcal{I}^{(a)}\right\}\\ &= \bigwedge\{a\in P(M):\mathcal{I}(A)\le a\}\\ &= \mathcal{I}(A).\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}$. □

最后引入 $M$- 模糊化 $P$- 开集族的定义. 其定义方式及研究方法与上述三种 $M$- 模糊化开集族相类似.

**定义** 4.8.6. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们称映射 $\mathcal{O}^P_{\mathcal{I}}:P(M)\to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 开集族, 其定义如下: $\forall a\in P(M)$

$$\mathcal{O}^P_{\mathcal{I}}(a)=\left\{A\in 2^E:\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}(A,a)=A\right\},$$

其中 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子.

**命题** 4.8.7. 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化 $P$- 开集族 $\mathcal{O}^P_{\mathcal{I}}:P(M)\to 2^{(2^E)}$ 满足: $\forall a\in P(M)$ 和 $\forall A\in 2^E$,

**(FPO1)** $\emptyset \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$.

**(FPO2)** $A, B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$.

**(FPO3)** 如果 $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$, 且 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 是 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 中真包含在 $A$ 内的属于 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 的极大子集的集合, 那么 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_1 = \emptyset$.

**(FPO4)** $\forall x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 当且仅当存在 $b \in P(M)$ 使得 $b \in \alpha(a)$, $\forall x \in A$ 都存在 $B_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$.

**证明** **(FPO1)-(FPO3)** 显然是成立的. 下证**(FPO4)**也成立.

设 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子, 假设对于任意的 $x \in A$, 都存在 $B_1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 使得 $B_1 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_1$, 则可知 $x \in \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(A' \cup x, a)$, 所以有 $A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(A' \cup x, a) = \{x\}$. 由**(FPN5)**可以推得, 存在 $b \in \alpha^*(a)$ 使得 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(A' \cup x, b) = \{x\}$, 从而 $x \in \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(A' \cup x, b)$, 即存在 $B_2 = \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(A' \cup x, b) \in \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$. 反之仍然成立. □

下面给出 $M$- 模糊化 $P$- 开集族的定义式.

**命题** 4.8.8. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 则 $M$- 模糊化 $P$- 开集族 $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{P}(a) &= \left\{A \in 2^E : \forall x \in A, R^{(a)}(A') \neq R^{(a)}(A' \cup x)\right\} \\
&= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(A, a) : A \in 2^E\right\} \\
&= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(B, a) : B' \in \mathcal{I}^{(a)}\right\} \\
&= \left\{\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(B, a) : \forall x \notin B, B' \cap \mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}(B \cup x, a) = \{x\}\right\}.
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{In}_{\mathcal{I}}^{P}$ 是 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子, $R^{(a)}$ 是截拟阵 $(E, \mathcal{I}^{(a)})$ 的秩函数.

**定理** 4.8.9. 设 $E$ 是非空有限集合, 映射 $\mathcal{O}^P: P(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足(**FPO1**)-(**FPO3**)及(**FPO4**). 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{O}^P})$ 使得 $\mathcal{O}^P = \mathcal{O}^P_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^P}}$.

**证明** 设映射 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}: 2^E \times P(M) \to 2^E$ 定义如下

$$\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A, a) = \bigcup \left\{A_i \in \mathcal{O}^P(a) : A_i \subseteq A, i = 1, 2, \cdots, k\right\}.$$

要想证存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{O}^P})$, 只需证明 $\forall a \in P(M)$ 且 $\forall A \in 2^E$, 映射 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}$ 是满足(**FPN1**)-(**FPN4**)及(**FPN5**)的 $M$-模糊化 $P$- 内部算子. 关键是验证(**FPN5**)成立.

设 $\forall x \in A, A \cap \mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A' \cup x, a) = \{x\}$, $x \in \mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A' \cup x, a)$ 是显然成立的. 又由(**FPO2**)知 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A' \cup x, a) \in \mathcal{O}^P(a)$, 故满足(**FPO4**)的前提, 所以 $b \in \beta^*(a)$ 且 $\forall x \in A$, 存在 $B_2 \in \mathcal{O}^P(b)$ 使得 $B_2 \subseteq A' \cup x$ 且 $x \in B_2$. 故有 $B_2 \subseteq \mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A' \cup x, b)$, 所以 $x \in \mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A' \cup x, b)$, 即 $A \cap \mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}(A' \cup x, b) = \{x\}$.

由定理 4.8.4 可间接推得, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}})$, 其对应的 $M$- 模糊化 $P$- 内部算子 $\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}} = \mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}$. 实际上, 也就得到 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{O}^P}) = (E, \mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}})$. 所以 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{O}^P})$ 所对应的 $M$- 模糊化 $P$- 开集族就是 $\mathcal{O}^P$. 也就是, $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{O}^P_{\mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{O}^P}}}(a) = \mathcal{O}^P_{\mathcal{I}_{\mathcal{O}^P}}(a) = \mathcal{O}^P(a)$. □

由定理 4.8.5 和定理 4.8.9, 对于一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I})$, 我们可以得到以下结论

$$\mathcal{I}_{\mathcal{O}^P_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}_{\mathrm{In}^P(\mathcal{O}^P_{\mathcal{I}})} = \mathcal{I}_{\mathrm{In}^P_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}.$$

所以在一个有限集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵族和 $M$- 模糊化 $P$- 开集族的全体构成的集族之间可以建立一一对应关系.

# 第五章　$M$- 模糊化基集族和 $M$- 模糊化圈集族

基和圈是拟阵理论中的两个重要基本概念，它们具有某种对偶关系. 在一个有限维线性空间 $V(n,F)$ 中，极大线性无关组是非常重要的概念. 在图论中, 圈的概念也是基本而且非常重要的概念.

本章的目的就是把基和圈的概念推广到 $M$- 模糊化拟阵中, 通过 $M$- 模糊化拟阵的截拟阵及其秩函数分别引入 $M$- 模糊化基集族和 $M$- 模糊化圈集族等概念，讨论它们的性质以及它们与 $M$- 模糊化拟阵的相互诱导关系.

## 5.1　$M$- 模糊化基集族

借助于 $M$- 模糊化拟阵的 $M$- 模糊化独立集族的四种不同的截集族, 我们可以分别定义 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族、$M$- 模糊化 $J$- 基集族、$M$- 模糊化 $\alpha$- 基集族及 $M$- 模糊化 $P$- 基集族，首先我们给出下面定义：

**定义** 5.1.1. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**BETA**).

映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 定义如下

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)=\left\{A\in 2^E : a\in\beta(\mathcal{I}(A))\text{且}\ \forall x\notin A, a\notin\beta(\mathcal{I}(A\cup x))\right\} \tag{5.1.1}$$

则称 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族.

从 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族的定义式，我们可以看出对任意的 $a\in\beta(\top)$, 若 $A\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 则 $A$ 一定是截拟阵 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的极大独立子集. 下面讨论 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族所满足的一些基本性质.

**定理** 5.1.2. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**, 且映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族, 则 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 满足以下条件: $\forall a\in\beta(\top)$,

**(FBB1)** $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)\neq\emptyset$.

**(FBB2)** 如果 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 且 $x\in B_1-B_2$, 那么存在 $y\in B_2-B_1$ 使得 $(B_1-x)\cup y\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBB3)**$\forall A\in 2^E$, 若 $\exists B_1\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 使得 $A\subseteq B_1$, 当且仅当 $\exists b\in\beta(\top)$ 满足 $a\in\beta(b)$ 且 $\exists B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(b)$ 使得 $A\subseteq B_2$.

**证明** 设 $\forall A\in 2^E$, $\forall a\in\beta(\top)$.

**(FBB1)**由**(FI1)**, $\mathcal{I}(\emptyset)=\top$,$E$ 是有限集, 由定义式**(4.1.1)**直接推得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)\neq\emptyset$.

**(FBB2)** 设 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 且 $x\in B_1-B_2$, 由定义式**(4.1.1)**, 可知 $B_1,B_2\in\mathcal{I}_{(a)}$ 是 $\mathcal{I}_{(a)}$ 中的两个极大独立子集, 且 $|B_1|=|B_2|$. (若不然假设 $|B_1|<|B_2|$, 则由**(FI3)**有

$$\bigvee_{e\in B_2-B_1}\mathcal{I}(B_1\cup e)\geq\mathcal{I}(B_1)\wedge\mathcal{I}(B_2),$$

则

$$\begin{aligned}\bigcup_{e\in B_1-B_2}\beta(\mathcal{I}(B_1\cup e)) &= \beta(\bigvee_{e\in B_2-B_1}\mathcal{I}(B_1\cup e))\\ &\supseteq \beta(\mathcal{I}(B_1)\wedge\mathcal{I}(B_2))\\ &= \beta(\mathcal{I}(B_1))\cap\beta(\mathcal{I}(B_2)).\end{aligned}$$

故 $a\in\bigcup_{e\in B_1-B_2}\beta(\mathcal{I}(B_1\cup e))$. 也就是存在 $e\in B_2-B_1$ 使得 $a\in\beta(\mathcal{I}(B_1\cup e))$. 即, $B_1\cup e\in\mathcal{I}_{(a)}$(与 $B_1$ 的极大性矛盾.)

又由**(FI2)**知, $B_1-x\in\mathcal{I}_{(a)}$ 且 $|B_1-x|<|B_2|$, 由**(FI3)**推得

$$a\in\bigcup_{y\in B_2-(B_1-x)}\beta(\mathcal{I}(B_1-x)\cup y)),$$

所以 $\exists y\in B_2-(B_1-x)$ 使得 $a\in\beta(\mathcal{I}(B_1-x)\cup y))$, 即

$$(B_1-x)\cup y\in\mathcal{I}_{(a)}.$$

由于 $x\notin B_2$, 所以 $x\neq y$ 且 $|(B_1-x)\cup y|=|B_1-x|+1=|B_1|=|B_2|$, 也可推得 $(B_1-x)\cup y$ 是 $\mathcal{I}_{(a)}$ 中的一个极大元. 若不然, $\exists B_3\in\mathcal{I}_{(a)}$ 且 $B_3\supsetneq B_1-x\cup y$, 则有 $|B_3|>|B_1-x\cup y|=|B_1|$, 故 $\forall e\in B_3-B_1$ 有 $a\in\bigcup_{e\in B_3-B_1}\beta(\mathcal{I}(B_1\cup e))$, 可以推知存在 $e\in B_3-B_1$ 使得 $a\in\beta(\mathcal{I}(B_1\cup e))$. 即 $B_1\cup e\in\mathcal{I}_{(a)}$ 与 $B_1$ 的极大性矛盾. 所以 $\forall e\notin(B_1-x)\cup y$, 有 $a\notin\beta(\mathcal{I}((B_1-x)\cup y\cup e))$. 由定义式**(4.1.1)**可知, $(B_1-x)\cup y\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBB3)**假设存在 $B_1\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$, 使得 $A\subseteq B_1$. 则由 $a\in\beta(\mathcal{I}(B_1))$ 及 $\mathcal{I}(A)\geq\mathcal{I}(B_1)$ 可知 $a\in\beta(\mathcal{I}(A))$, 故 $A\in\mathcal{I}_{(a)}$. 又由定理 1.2.4 中的 (4) 式, 可以推得存在 $b\in\beta(\top)$ 满足 $a\in\beta(b)$ 使得 $A\in\mathcal{I}_{(b)}$. 由拟阵的基集族性质, 存在 $B_2\in\mathcal{I}_{(b)}$ 使得 $A\subseteq B_2$ 且 $\forall x\notin B_2, B_2\cup x\notin\mathcal{I}_{(b)}$. 即 $b\in\beta(\mathcal{I}(B_2))$ 且 $\forall x\notin B_2, b\notin\beta(\mathcal{I}(B_2\cup x))$, 故 $B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(b)$. 此证明过程可逆, 所以**(FBB3)**成立. □

由 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族定义和上述证明, 以及拟阵基的性质, 显然可以得到以下命题.

**命题** 5.1.3. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族. 则对任意的 $A\in 2^E$ 和 $\forall a\in\beta(\top)$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}$ 满足以下性质.

**(FBB2)*** 如果 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$ 且 $x\in B_1-B_2$, 那么存在 $y\in B_2-B_1$, 使得 $(B_2-y)\cup x\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$.

**(FBB4)**若 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a)$, 则 $|B_1|=|B_2|$.

**定理** 5.1.4. 设 $E$ 为非空有限集合, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 映射 $\mathcal{B}^{\beta}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 满足条件**(FBB1)**, **(FBB2)**及**(FBB3)**. 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})$ 使得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}}^{\beta}=\mathcal{B}^{\beta}$.

**证明** $\forall A\in 2^E$, 令映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}:2^E\to M$ 定义如下

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}(A)=\bigvee\left\{a\in\beta(\top):\exists B\in\mathcal{B}^{\beta}(a)\text{使得}A\subseteq B\right\}.\qquad(5.1.2)$$

要想证明由映射 $\mathcal{B}^{\beta}$ 可以诱导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})$ 使得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}}^{\beta}=\mathcal{B}^{\beta}$. 我们只需要验证

$$A\in(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)}\Leftrightarrow\exists B\in\mathcal{B}^{\beta}(a)\text{使得}A\subseteq B.$$

以及由此 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})$ 诱导出的 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}}^{\beta}=\mathcal{B}^{\beta}$.

下面首先验证

$$A\in(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)}\Leftrightarrow\exists B\in\mathcal{B}^{\beta}(a)\text{使得}A\subseteq B.$$

一方面, 令 $A\in(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)}$, 则 $a\in\beta(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}(A))$, 由定义式**(4.1.2)**及极小集性质可推知, $\exists b\in\beta(\top)$ 使得 $a\in\beta(b)$ 且 $\exists B_1\in\mathcal{B}^{\beta}(b)$ 有 $A\subseteq B_1$. 由**(FBB3)**可知, $\exists B_2\in\mathcal{B}^{\beta}(a)$ 使得 $A\subseteq B_2$.

另一方面, 我们设 $\forall a \in \beta(\top)$, 若存在 $B \in \mathcal{B}^\beta(a)$ 使得 $A \subseteq B$. 则由**(FBB3)**可知, $\exists b \in \beta(\top)$ 满足 $a \in \beta(b)$ 且存在 $B_3 \in \mathcal{B}^\beta(b)$ 使得 $A \subseteq B_3$. 由此可得 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}(A) \geq b$, 故 $a \in \beta(b) \subseteq \beta(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}(A))$, 所以 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)}$.

因为对于某个 $a \in \beta(\top)$, $\mathcal{B}^\beta(a)|_{\{a\}}$ 满足**(B1)**和**(B2)**, 由拟阵的性质, 存在一个拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_a)$ 以 $\mathcal{B}^\beta(a)|_{\{a\}}$ 为基集族, 且 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_a$ 当且仅当 $\exists B \in \mathcal{B}^\beta(a)$使得$A \subseteq B$, 故 $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_a = (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)}$, 由定理 2.1.4 可知, $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

其次我们再来验证对任意的 $a \in \beta(\top)$, $\mathcal{B}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}}(a) = \mathcal{B}^\beta(a)$.

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{B}^\beta_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}}(a) &\Leftrightarrow a \in \beta(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}(A))\text{且}\forall x \notin A, a \notin \beta(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta}(A \cup x)) \\
&\Leftrightarrow A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)} \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_{(a)} \\
&\Leftrightarrow A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_a \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_a \\
&\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}^\beta(a) \text{ 满足 } A \subseteq B \text{ 都有 } B = A \\
&\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}^\beta(a).
\end{aligned}
$$

若不然, $\exists B \in \mathcal{B}^\beta(a)$ 使得 $A \subsetneq B$, 则有 $a \in \bigcup_{e \in B - A} \beta(\mathcal{I}(A \cup e))$, 即 $\exists e \in B - A$ 使 $A \cup e \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta})_a$ 矛盾. □

**定理** 5.1.5. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(BETA)**. 令 $\mathcal{B}^\beta_{\mathcal{I}} : \beta(\top) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 基集族, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\beta_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** 一方面, $\forall A \in 2^E$ 有

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A) \\
= & \bigvee\left\{a \in \beta(\top) : \exists B \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}(a) \text{ 使得 } A \subseteq B\right\} \\
\leq & \bigvee\left\{a \in \beta(\top) : \exists B \supseteq A, \text{ 使得 } \mathcal{I}(A) \geq \mathcal{I}(B), a \in \beta(\mathcal{I}(B))\right\} \\
\leq & \bigvee\{a \in \beta(\top) : a \in \beta(\mathcal{I}(A))\} \\
= & \mathcal{I}(A).
\end{aligned}
$$

另一方面, $\forall A \in 2^E$, 若 $a \in \beta(\mathcal{I}(A))$, 则 $A \in \mathcal{I}_{(a)}$. 由定理 1.2.4 知, $\exists b \in \beta(\top)$ 满足 $a \in \beta(b)$, 使得 $A \in \mathcal{I}_{(b)}$. 则在 $(E, \mathcal{I}_{(b)})$ 中存在一个极大独立集 $B_1 \supseteq A$ 满足 $B_1 \in \mathcal{I}_{(b)}$ 且 $\forall x \notin B_1, B_1 \cup x \notin \mathcal{I}_{(b)}$. 即 $\exists B_1 \supseteq A$ 使得 $b \in \beta(\mathcal{I}(B_1))$ 且 $\forall x \notin B_1, b \notin \beta(\mathcal{I}(B_1 \cup x))$. 故 $A \subseteq B_1$ 且 $B_1 \in \mathcal{B}^{\beta}(b)$, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A) \geq b$, 从而 $a \in \beta(\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A))$, 所以 $\mathcal{I}(A) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A)$.

故 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\beta}}(A) = \mathcal{I}(A)$. □

所以由以上内容可得结论：一个有限集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵与其上的 $M$- 模糊化 $\beta$ 基集族可以相互诱导.

下面给出 $M$- 模糊化 $J$- 基集族的定义及其性质定理.

**定义** 5.1.6. 设 $(E, \mathcal{I})$ 为模糊化拟阵, 映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{J} : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 定义如下

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{J}(a) = \left\{A \in 2^E : \mathcal{I}(A) \geq a \text{ 且 } \forall x \notin A, \mathcal{I}(A \cup x) \not\geq a\right\}. \quad (5.1.3)$$

则称 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{J}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 基集族.

**定理** 5.1.7. 设 $(E, \mathcal{I})$ 为模糊化拟阵, 映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{J} : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 的 $M$- 模糊化 $J$- 基集族, 则 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{J}$ 满足以下条件:
$\forall a \in J(M)$,

**(FJB1)** $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{J}(a) \neq \emptyset$.

**(FJB2)** 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 那么存在 $y \in B_2 - B_1$, 使得 $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$.

**(FJB3)**$\forall A \in 2^E$, 若存在 $B_1 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 使得 $A \subseteq B_1$, 当且仅当 $\forall b \in \beta(a)$ 都存在 $B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(b)$ 使得 $A \subseteq B_2$.

**证明** 设 $\forall A \in 2^E$, $\forall a \in J(M)$.

**(FJB1)**显然成立.

**(FJB2)** 设 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 由定义式(4.1.3), 可知 $B_1, B_2 \in \mathcal{I}_{[a]}$ 是 $\mathcal{I}_{[a]}$ 中的两个极大元, 且 $|B_1| = |B_2|$. (若不然假设 $|B_1| < |B_2|$, 则由(FI3)有

$$\bigvee_{e \in B_2 - B_1} \mathcal{I}(B_1 \cup e) \geq \mathcal{I}(B_1) \wedge \mathcal{I}(B_2) \geq a,$$

又由于 $a \in J(M)$, 所以存在 $e \in B_2 - B_1$ 使得 $\mathcal{I}(B_1 \cup e) \geq a$, 即 $B_1 \cup e \in \mathcal{I}_{[a]}$(与 $B_1$ 的极大性矛盾).

由(FI2)可知, $B_1 - x \in \mathcal{I}_{[a]}$ 且 $|B_1 - x| < |B_2|$, 由(FI3)推得

$$\bigvee_{y \in B_2 - (B_1 - x)} \mathcal{I}(B_1 - x) \cup y) \geq a,$$

因为 $a$ 是分子, 所以 $\exists y \in B_2 - (B_1 - x)$ 使得 $\mathcal{I}(B_1 - x) \cup y) \geq a$, 即 $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{I}_{[a]}$. 由于 $x \notin B_2$, 所以 $x \neq y$ 且

$$|(B_1 - x) \cup y| = |B_1 - x| + 1 = |B_1| = |B_2|,$$

也可推得 $(B_1 - x) \cup y$ 是 $\mathcal{I}_{[a]}$ 中的一个极大元, 也就是, 对于任意的 $e \notin (B_1 - x) \cup y$, 有 $\mathcal{I}((B_1 - x) \cup y \cup e) \not\geq a$. 由定义式(4.1.3)可知, $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$.

**(FJB3)**假设存在 $B_1 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$, 使得 $A \subseteq B_1$. 则由(FI2)及式(4.1.3)有 $\mathcal{I}(A) \geq \mathcal{I}(B_1) \geq a$, 可知 $A \in \mathcal{I}_{[a]}$. 又由定理 1.2.4 中

的 (3) 式, 可以推得 $\forall b \in \beta(a)$ 有 $A \in \mathcal{I}_{[b]}$. 由拟阵的性质可知, 存在 $B_2 \in \mathcal{I}_{[b]}$ 使得 $A \subseteq B_2$ 且 $\forall x \notin B_2, B_2 \cup x \notin \mathcal{I}_{[b]}$. 即 $b \in \beta(\mathcal{I}(B_2))$ 且 $\forall x \notin B_2, b \notin \beta(\mathcal{I}(B_2 \cup x))$, 故 $B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(b)$. 反之也成立, 所以(**FJB3**)成立. □

我们可以将拟阵基集族的下列相似性质直接推广到 $M$ 模糊化拟阵理论中.

**命题** 5.1.8. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为 $M$- 模糊化拟阵, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 基集族. 则 $\forall A \in 2^E, \forall a \in J(M)$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J$ 满足以下性质.

**(FJB2)*** 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 那么存在 $y \in B_2 - B_1$, 使得 $(B_2 - y) \cup x \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$.

**(FJB4)**若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a)$, 则 $|B_1| = |B_2|$.

**定理** 5.1.9. 设 $E$ 为非空有限集合, 映射 $\mathcal{B}^J : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件(**FJB1**), (**FJB2**)及(**FJB3**). 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})$ 使得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}}^J = \mathcal{B}^J$.

**证明** 令映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J} : 2^E \to M$ 定义如下, $\forall A \in 2^E$,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A) = \bigvee \left\{ a \in J(M) : \exists B \in \mathcal{B}^J(a)\text{使得}A \subseteq B \right\}. \tag{5.1.4}$$

要想证明存在 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})$ 使得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}}^J = \mathcal{B}^J$. 我们只需要验证

$$A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_{[a]} \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}^J(a)\text{使得}A \subseteq B.$$

一方面, 令 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_{[a]}$, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A) \geq a$, 即 $\bigvee\limits_{\substack{c \in J(M) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A) \geq c}} c \geq a$.
$\forall b \in \beta(a)$ 存在 $c \in J(M)$ 满足 $\exists B_1 \in \mathcal{B}^J(c)$使得$A \subseteq B_1$ 且 $b \in \beta(c)$.

由(**FJB3**)可推知, $\exists B_2 \in \mathcal{B}^J(b)$ 有 $A \subseteq B_2$. 再由(**FJB3**)可知, $\exists B \in \mathcal{B}^J(a)$ 使得 $A \subseteq B$.

另一方面, 设 $\forall a \in J(M)$, 存在 $B \in \mathcal{B}^J(a)$ 使得 $A \subseteq B$. 则由(**FJB3**), $\forall b \in \beta(a)$ 存在 $B_1 \in \mathcal{B}^J(b)$ 使得 $A \subseteq B_1$. 由此可得, $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A) \geq b$, 故 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A) \geq \bigvee_{b \in \beta(a)} b = a$, 所以 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_{[a]}$.

因为对某个确定的分子 $a \in J(M)$ 来说, $\mathcal{B}^J(a)|_{\{a\}}$ 满足(**B1**)和(**B2**), 所以存在一个拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_a)$ 以 $\mathcal{B}^J(a)|_{\{a\}}$ 为基集族, 且 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_a$ 当且仅当 $\exists B \in \mathcal{B}^J(a)$ 使得 $A \subseteq B$, 故 $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_a = (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_{[a]}$, 由定理 2.1.2 可知, $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下证 $\forall a \in J(M)$, $\mathcal{B}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}}(a) = \mathcal{B}^J(a)$.

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{B}^J_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}}(a) &\Leftrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A) \geq a \text{且} \forall x \notin A, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^J}(A \cup x) \not\geq a \\
&\Leftrightarrow A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_{[a]} \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_{[a]} \\
&\Leftrightarrow A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_a \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_a \\
&\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}^J(a) \text{ 满足 } A \subseteq B \Rightarrow B = A \\
&\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}^J(a).
\end{aligned}
$$

若不然, 假设存在 $B \in \mathcal{B}^J(a)$ 使得 $A \subsetneq B$, 则存在着 $x \in B - A$, 有 $x \notin A, A \cup x \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J})_a$ 矛盾. □

**定理** 5.1.10. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 我们称映射 $\mathcal{B}^J_{\mathcal{I}} : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 基集族, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^J_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** 一方面, $\forall A \in 2^E$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J}(A) &= \bigvee \left\{a \in J(M) : \exists B \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J(a) \text{ 使得 } A \subseteq B\right\} \\
&\leq \bigvee \left\{a \in J(M) : \exists B \supseteq A, \text{ 使得 } \mathcal{I}(A) \geq \mathcal{I}(B) \geq a\right\} \\
&\leq \bigvee \{a \in J(M) : \mathcal{I}(A) \geq a\} \\
&= \mathcal{I}(A).
\end{aligned}$$

另一方面, $\forall A \in 2^E$, 若 $\mathcal{I}(A) \geq a$, 则 $A \in \mathcal{I}_{[a]}$. 由定理 1.2.4 知, $\forall b \in \beta(a)$, 有 $A \in \mathcal{I}_{[b]}$. 则在 $(E, \mathcal{I}_{[b]})$ 中存在一个极大独立集 $B \supseteq A$ 满足 $B \in \mathcal{I}_{[b]}$ 且 $\forall x \notin B, B \cup x \notin \mathcal{I}_{[b]}$. 即 $\exists B \supseteq A$ 使得 $\mathcal{I}(B) \geq b$ 且 $\forall x \notin B, \mathcal{I}(B \cup x) \not\geq b$. 故 $A \subseteq B$ 且 $B \in \mathcal{B}^J(b)$, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J}(A) \geq b$, 从而 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J}(A) \geq \bigvee\limits_{b \in \beta(a)} b = a$, 所以 $\mathcal{I}(A) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J}(A)$.

故有 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^J}(A) = \mathcal{I}(A)$. □

下面给出 $M$- 模糊化 $\alpha$- 基集族的定义.

**定义** 5.1.11. 设 $(E, \mathcal{I})$ 为模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha} : \alpha(\bot) \to 2^{(2^E)}$ 定义如下, $\forall a \in \alpha(\bot)$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) = \left\{A \in 2^E : a \notin \alpha(\mathcal{I}(A)), \text{且 } \forall x \notin A, a \in \alpha(\mathcal{I}(A \cup x))\right\}. \tag{5.1.5}$$

则称 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 基集族.

**定理** 5.1.12. 设 $(E, \mathcal{I})$ 为模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 且映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha} : \alpha(\bot) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 基集族. 则 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 满足以下条件: $\forall a \in \alpha(\bot)$,

**(FAB1)** $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) \neq \emptyset$.

**(FAB2)** 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 那么 $\exists y \in B_2 - B_1$, 使得 $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAB3)**$\forall A \in 2^E$, 若存在 $B_1 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 使得 $A \subseteq B_1$, 当且仅当对任意的满足 $a \in \alpha(b)$ 的 $b \in \alpha(\perp)$ 都存在 $B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(b)$ 使得 $A \subseteq B_2$.

**证明** 设 $\forall A \in 2^E, \forall a \in \alpha(\perp)$.

**(FAB1)**显然成立.

**(FAB2)** 设 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 由定义式**(4.1.5)**, 可知 $B_1, B_2 \in \mathcal{I}^{[a]}$ 是 $\mathcal{I}^{[a]}$ 中的两个极大元, 且 $|B_1| = |B_2|$. (若不然假设 $|B_1| < |B_2|$, 则由**(FI3)**有

$$\bigvee_{e \in B_2 - B_1} \mathcal{I}(B_1 \cup e) \geq \mathcal{I}(B_1) \wedge \mathcal{I}(B_2),$$

则

$$\begin{aligned} \bigcap_{e \in B_1 - B_2} \alpha(\mathcal{I}(B_1 \cup e)) &= \alpha(\bigvee_{e \in B_2 - B_1} \mathcal{I}(B_1 \cup e)) \\ &\subseteq \alpha(\mathcal{I}(B_1) \wedge \mathcal{I}(B_2)) \\ &= \alpha(\mathcal{I}(B_1)) \cap \alpha(\mathcal{I}(B_2)). \end{aligned}$$

故 $a \notin \bigcap\limits_{e \in B_1 - B_2} \alpha(\mathcal{I}(B_1 \cup e))$. 也就是存在 $e \in B_2 - B_1$ 使得结论 $a \notin \alpha(\mathcal{I}(B_1 \cup e))$ 成立. 即 $B_1 \cup e \in \mathcal{I}^{[a]}$ 与 $B_1$ 的极大性矛盾.)

又由**(FI2)**知, $B_1 - x \in \mathcal{I}^{[a]}$ 且 $|B_1 - x| < |B_2|$, 由**(FI3)**有

$$a \notin \bigcap_{y \in B_2 - (B_1 - x)} \alpha(\mathcal{I}(B_1 - x) \cup y)),$$

所以 $\exists y \in B_2 - (B_1 - x)$ 使得下式 $a \notin \alpha(\mathcal{I}(B_1 - x) \cup y))$ 成立, 即 $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{I}^{[a]}$. 由于 $x \notin B_2$, 所以 $x \neq y$ 且

$$|(B_1 - x) \cup y| = |B_1 - x| + 1 = |B_1| = |B_2|,$$

也可推得 $(B_1-x)\cup y$ 是 $\mathcal{I}^{[a]}$ 中的一个极大元, 也就是, 对于任意的 $e\notin(B_1-x)\cup y$, 有 $a\in\alpha(\mathcal{I}((B_1-x)\cup y\cup e))$. 由定义式**(4.1.5)**可知, $(B_1-x)\cup y\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAB3)**假设存在 $B_1\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$, 使得 $A\subseteq B_1$. 则由 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(B_1))$ 及 $\mathcal{I}(A)\geq\mathcal{I}(B_1)$ 可知 $a\notin\alpha(\mathcal{I}(A))$, 故 $A\in\mathcal{I}^{[a]}$. 又由定理 1.2.4 中的 (5) 式, 可得对任意的满足 $a\in\alpha(b)$ 的 $b\in\alpha(\perp)$ 有 $A\in\mathcal{I}^{[b]}$. 由拟阵的基集族性质可知, 存在 $B_2\in\mathcal{I}^{[b]}$ 使得 $A\subseteq B_2$ 且 $\forall x\notin B_2, B_2\cup x\notin\mathcal{I}^{[b]}$. 即 $b\notin\alpha(\mathcal{I}(B_2))$ 及 $\forall x\notin B_2, b\in\alpha(\mathcal{I}(B_2\cup x))$, 故 $B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(b)$. 此证明过程可逆, 所以**(FAB3)**成立. □

显然以下命题也成立.

**命题** 5.1.13. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 映射 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}:\alpha(\perp)\to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 基集族. 则 $\forall A\in 2^E,\forall a\in\alpha(\perp)$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}$ 满足以下性质.

**(FAB2)*** 如果 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$ 且 $x\in B_1-B_2$, 那么存在 $y\in B_2-B_1$, 使得 $(B_2-y)\cup x\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$.

**(FAB4)**若 $B_1,B_2\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a)$, 则 $|B_1|=|B_2|$.

**定理** 5.1.14. 设 $E$ 为非空有限集合, $M$ 满足条件 (**ALPHA**), 映射 $\mathcal{B}^{\alpha}:\alpha(\perp)\to 2^{(2^E)}$ 满足条件**(FAB1)**, **(FAB2)**及**(FAB3)**. 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}})$ 使得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}}}^{\alpha}=\mathcal{B}^{\alpha}$.

**证明** 令映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}}:2^E\to M$ 定义如下, $\forall A\in 2^E$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}}(A)=\bigwedge\{a\in\alpha(\perp):\forall B\in\mathcal{B}^{\alpha}(a)\Rightarrow A\nsubseteq B\}. \qquad (5.1.6)$$

要想证明由映射 $\mathcal{B}^{\alpha}$ 可以诱导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}})$ 使得 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}}}^{\alpha}=\mathcal{B}^{\alpha}$. 我们只需要验证

$$A\notin(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^{\alpha}})^{[a]}\text{当且仅当}\forall B\in\mathcal{B}^{\alpha}(a)\Rightarrow A\nsubseteq B.$$

一方面, 令 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^{[a]}$, 则 $a \in \alpha(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}(A))$, 由定义式**(4.1.6)**及极大集性质可推知, $\exists b \in \alpha(\bot)$ 使得 $a \in \alpha(b)$ 并且 $\forall B \in \mathcal{B}^\alpha(b)$ 推出 $A \not\subseteq B$. 由**(FAB3)**可知, $\forall B \in \mathcal{B}^\alpha(a) \Rightarrow A \not\subseteq B$.

另一方面, $\forall a \in \alpha(\bot)$, 若$\forall B \in \mathcal{B}^\alpha(a) \Rightarrow A \not\subseteq B$. 则由**(FAB3)**可知, $\exists b \in \alpha(\bot)$ 满足 $a \in \alpha(b)$, $\forall B \in \mathcal{B}^\alpha(b) \Rightarrow A \not\subseteq B$. 由此可得 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}(A) \leq b$, 故 $a \in \alpha(b) \subseteq \alpha(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}(A))$, 所以 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^{[a]}$.

因为$\mathcal{B}^\alpha(a)|_{\{a\}}$ 满足**(B1)**和**(B2)**, 由拟阵基集族的性质可知, 存在一个拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^a)$ 以 $\mathcal{B}^\alpha(a)|_{\{a\}}$ 为基集族, 且 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^a$ 当且仅当 $\forall B \in \mathcal{B}^\alpha(a) \Rightarrow A \not\subseteq B$, 故 $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})_a = (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^{[a]}$, 由定理 2.1.6 可知, $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下面验证对任意的 $a \in \alpha(\bot)$, $\mathcal{B}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}}(a) = \mathcal{B}^\alpha(a)$.

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{B}^\alpha_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}}(a) &\Leftrightarrow a \notin \alpha(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}(A))\text{且}\forall x \notin A, a \in \alpha(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha}(A \cup x)) \\
&\Leftrightarrow A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^{[a]} \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})^{[a]} \\
&\Leftrightarrow A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})_a \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha})_a \\
&\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}^\alpha(a) \text{ 满足 } A \subseteq B \text{ 都有 } B = A \\
&\Leftrightarrow A \in \mathcal{B}^\alpha(a).
\end{aligned}
$$

□

**定理** 5.1.15. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 **(ALPHA)**, 令 $\mathcal{B}^\alpha_\mathcal{I} : \alpha(\bot) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 基集族, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^\alpha_\mathcal{I}} = \mathcal{I}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$, $\forall a \in \alpha(\bot)$, 由 $\mathcal{B}^\alpha_\mathcal{I}$ 的定义可知

$$a \in \alpha(\mathcal{I}(A))\text{当且仅当}\forall B \in \mathcal{B}^\alpha_\mathcal{I}(a) \Rightarrow A \not\subseteq B.$$

一方面, 设 $a \in \alpha(\mathcal{I}(A))$, 若 $\exists B \in \mathcal{B}^\alpha_\mathcal{I}(a)$ 使得 $A \subseteq B$, 由 $\mathcal{I}(A) \geq \mathcal{I}(B)$ 知 $a \in \alpha(\mathcal{I}(B))$ 矛盾.

另一方面, 设 $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) \Rightarrow A \not\subseteq B$. 对于 $a \in \alpha(\perp)$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}|_{\{a\}}$ 实质是拟阵 $(E,\mathcal{I}^{[a]})$ 的基集族, 所以 $A \notin \mathcal{I}^{[a]}$, 即 $a \in \alpha(\mathcal{I}(A))$.

从而

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}}(A) &= \bigwedge\{a \in \alpha(\perp) : \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}(a) \Rightarrow A \not\subseteq B\} \\ &= \bigwedge\{a \in \alpha(\perp) : a \in \alpha(\mathcal{I}(A))\} \\ &= \mathcal{I}(A).\end{aligned}$$

故有 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{\alpha}}(A) = \mathcal{I}(A)$. □

最后给出 $M$- 模糊化 $P$- 基集族的定义.

**定义** 5.1.16. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为 $M$- 模糊化拟阵, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 基集族, 其定义式如下: $\forall a \in P(M)$,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(a) = \left\{A \in 2^E : \mathcal{I}(A) \not\leq a, \text{且 } \forall x \notin A, \mathcal{I}(A \cup x) \leq a\right\}. \quad (5.1.7)$$

**定理** 5.1.17. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为 $M$- 模糊化拟阵, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 基集族, 则 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}$ 满足以下条件: $\forall a \in P(M)$,

**(FPB1)** $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(a) \neq \emptyset$.

**(FPB2)** 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 那么存在 $y \in B_2 - B_1$, 使得 $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$.

**(FPB3)** $\forall A \in 2^E$, 若 $\exists B_1 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 使得 $A \subseteq B_1$, 当且仅当 $\exists b \in \alpha(a)$ 且 $\exists B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(b)$ 使得 $A \subseteq B_2$.

**证明** 设 $\forall A \in 2^E$, $\forall a \in P(M)$.

**(FPB1)**由**(FI1)**显然成立.

**(FPB2)** 设 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}}^{P}(a)$ 且 $x \in B_1 - B_2$, 由定义式**(4.1.7)**, 可知 $B_1, B_2 \in \mathcal{I}^{(a)}$ 是 $\mathcal{I}^{(a)}$ 中的两个极大元, 且 $|B_1| = |B_2|$. (若不然假设 $|B_1| < |B_2|$, 有 $\mathcal{I}(B_1) \wedge \mathcal{I}(B_2) \not\leq a$, 则由**(FI3)**有

$$\bigvee_{e \in B_2 - B_1} \mathcal{I}(B_1 \cup e) \geq \mathcal{I}(B_1) \wedge \mathcal{I}(B_2) \not\leq a,$$

则 $\exists e\in B_2-B_1$ 使得 $\mathcal{I}(B_1\cup e)\not\leq a$. 即 $B_1\cup e\in\mathcal{I}^{(a)}$ 与 $B_1$ 的极大性矛盾.)

又由(**FI2**)知, $B_1-x\in\mathcal{I}^{(a)}$ 且 $|B_1-x|<|B_2|$, 由(**FI3**)和 $a\in P(M)$ 可得, $\exists y\in B_2-(B_1-x)$ 使得 $\mathcal{I}(B_1-x)\cup y)\not\leq a$, 即 $(B_1-x)\cup y\in\mathcal{I}^{(a)}$. 由于 $x\notin B_2$, 所以 $x\neq y$ 且

$$|(B_1-x)\cup y|=|B_1-x|+1=|B_1|=|B_2|,$$

也可推得 $(B_1-x)\cup y$ 是 $\mathcal{I}^{(a)}$ 中的一个极大元, 也就是, 对于任意的 $e\notin(B_1-x)\cup y$, 有 $\mathcal{I}((B_1-x)\cup y\cup e)\leq a$. 由定义式(**4.1.7**)可知, $(B_1-x)\cup y\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(a)$.

(**FPB3**)假设存在 $B_1\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(a)$, 使得 $A\subseteq B_1$. 则由 $\mathcal{I}(B_1)\not\leq a$ 及 $\mathcal{I}(A)\geq\mathcal{I}(B_1)$ 可知 $\mathcal{I}(A)\not\leq a$, 故 $A\in\mathcal{I}^{(a)}$. 又由定理 1.2.4 中的 (6) 式, 可以推得存在 $b\in\alpha(a)$ 使得 $A\in\mathcal{I}^{(b)}$. 由拟阵的性质可知, 存在 $B_2\in\mathcal{I}^{(b)}$ 使得 $A\subseteq B_2$ 且 $\forall x\notin B_2, B_2\cup x\notin\mathcal{I}^{(b)}$. 即 $\mathcal{I}(B_2)\not\leq b$ 且 $\forall x\notin B_2,\mathcal{I}(B_2\cup x)\leq b$, 故 $B_2\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(b)$. 此证明过程可逆, 所以(**FPB3**)成立. □

由 $M$- 模糊化拟阵所诱导的 $M$- 模糊化 $P$- 基集族也有以下性质.

**命题** 5.1.18. 设 $(E,\mathcal{I})$ 为 $M$- 模糊化拟阵, $\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}:P(M)\to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{I})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 基集族. 则 $\forall A\in 2^E,\forall a\in P(M)$, $\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}$ 满足以下性质.

(**FPB2**)* 如果 $B_1,B_2\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(a)$ 且 $x\in B_1-B_2$, 那么存在 $y\in B_2-B_1$, 使得 $(B_2-y)\cup x\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(a)$.

(**FPB4**)若 $B_1,B_2\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(a)$, 则 $|B_1|=|B_2|$.

**定理** 5.1.19. 设 $E$ 为非空有限集合, 映射 $\mathcal{B}^P:P(M)\to 2^{(2^E)}$ 满足条件(**FPB1**), (**FPB2**)及(**FPB3**). 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})$ 使得 $\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}}=\mathcal{B}^P$

**证明** 令映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}: 2^E \to M$ 定义如下, $\forall A \in 2^E$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}(A) = \bigwedge \left\{a \in P(M) : \forall B \in \mathcal{B}^P(a) \Rightarrow A \not\subseteq B\right\}. \tag{5.1.8}$$

要想证明存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})$, 使得 $\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}} = \mathcal{B}^P$. 只需验证

$$A \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{(a)} \text{当且仅当} \forall B \in \mathcal{B}^P(a) \Rightarrow A \not\subseteq B.$$

一方面, 令 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{(a)}$, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}(A) \leq a$, 由定义式**(4.1.8)**及素元性质可推知, $\forall b \in \alpha(a)$ 存在 $c \in P(M)$ 使得 $b \in \alpha(c)$ 且 $\forall B \in \mathcal{B}^P(c) \Rightarrow A \not\subseteq B$. 由**(FPB3)**可知, $\forall B \in \mathcal{B}^P(b) \Rightarrow A \not\subseteq B$. 再应用**(FPB3)**可得 $\forall B \in \mathcal{B}^P(a) \Rightarrow A \not\subseteq B$. 上述过程可逆.

因此 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{(a)}$当且仅当$\forall B \in \mathcal{B}^P(a) \Rightarrow A \not\subseteq B$.

因为 $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{B}^P(a)|_{\{a\}}$ 满足**(B1)**和**(B2)**, 由拟阵的性质可知, 存在一个拟阵 $(E, (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^a)$ 以 $\mathcal{B}^P(a)|_{\{a\}}$ 为基集族, 则 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^a$ 当且仅当 $\exists B \in \mathcal{B}^P(a) \Longrightarrow A \subseteq B$, 故 $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^a = (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{(a)}$, 由定理 2.1.2 可知 $(E, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵.

下证 $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}}(a) = \mathcal{B}^P(a)$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{B}^P_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}}(a) \;&\Leftrightarrow\; \mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}(A) \not\leq a \text{且} \forall x \notin A, \mathcal{I}_{\mathcal{B}^P}(A \cup x) \leq a \\
&\Leftrightarrow\; A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{(a)} \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{(a)} \\
&\Leftrightarrow\; A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{a} \text{ 且 } \forall x \notin A, A \cup x \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P})^{a} \\
&\Leftrightarrow\; \forall B \in \mathcal{B}^P(a) \text{ 满足 } A \subseteq B \Rightarrow B = A \\
&\Leftrightarrow\; A \in \mathcal{B}^P(a).
\end{aligned}$$

□

**定理** 5.1.20. 设 $(E, \mathcal{I})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 令 $\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 是由 $(E, \mathcal{I})$ 诱导出的 $M$- 模糊化 $P$- 基集族, 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

**证明** $\forall A\in 2^E$ 由于

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}}(A) &= \bigwedge\left\{a\in P(M):\forall B\in\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}(a)\ \text{有}\ A\not\subseteq B\right\}\\ &= \bigwedge\{a\in P(M):\mathcal{I}(A)\leq a\} \quad \text{由定义式(4.1.7)}\\ &= \mathcal{I}(A).\end{aligned}$$

故 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}^P_{\mathcal{I}}}(A)=\mathcal{I}(A)$. □

## 5.2 $M$- 模糊化圈集族

借助于 $M$- 模糊化拟阵的 $M$- 模糊化相关集族的四种不同的截集族, 我们可以定义 $M$- 模糊化 $\beta$- 圈集族、$M$- 模糊化 $J$- 圈集族、$M$- 模糊化 $\alpha$- 圈集族及 $M$- 模糊化 $P$- 圈集族, 首先我们给出下面定义:

**定义** 5.2.1. 设 $(E,\mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 其中 $\mathcal{D}$ 是 $M$- 模糊化相关集族. 若 $M$ 满足条件 (**BETA**), 则称映射 $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 圈集族. $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}$ 定义如下, $\forall a\in\beta(\top)$

$$\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}(a)=\left\{A\in 2^E: a\in\beta(\mathcal{D}(A))\ \text{且}\forall x\in A, a\notin\beta(\mathcal{D}(A-x))\right\}. \tag{5.2.1}$$

**定理** 5.2.2. 设 $(E,\mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**BETA**). 映射 $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}:\beta(\top)\to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 圈集族. 则 $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}$ 满足以下性质. $\forall a\in\beta(\top)$ 及 $\forall A\in 2^E$

**(FBQ1)** $\emptyset \notin \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$.

**(FBQ2)** 如果 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 且 $C_1 \subseteq C_2$, 那么 $C_1 = C_2$.

**(FBQ3)** 如果 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a), C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 那么存在 $C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 满足 $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

**(FBQ4)** 若存在 $C_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 当且仅当 $\exists b \in \beta(\top)$ 满足 $a \in \beta(b)$ 且存在 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(b)$ 使得 $C_2 \subseteq A$.

**证明** **(FBQ1)** $\forall a \in \beta(\top)$, 由 $\mathcal{D}(\emptyset) = \bot$ 知, $a \notin \beta(\mathcal{D}(\emptyset)) = \emptyset$, 故 $\emptyset \notin \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$.

**(FBQ2)** 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 且 $C_1 \subseteq C_2$, 则有 $a \in \beta(\mathcal{D}(C_1))$ 且 $a \in \beta(\mathcal{D}(C_2))$, 推知 $C_1, C_2 \in \mathcal{D}_{(a)}$. 则由拟阵的性质可知存在圈 $C$ 使得 $C \subseteq C_1 \subseteq C_2 \in \mathcal{D}_{(a)}$, 令 $C_1 \neq C_2$, 则存在 $x \in C_2 - C_1$ 有 $C \subseteq C_2 - x \in \mathcal{D}_{(a)}$. 即 $\exists x \in C_2$ 使得 $a \in \beta(\mathcal{D}(C_2 - x))$ 与 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 矛盾. 故 $C_1 = C_2$.

**(FBQ3)** 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a), C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 下证 $\exists C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 满足 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$. 实际上我们只需要证明 $a \in \beta(\mathcal{D}(C_1 \cup C_2 - e))$. 由定义式(4.2.1)知, $C_1, C_2 \in \mathcal{D}_{(a)}$ 且 $\forall x \in C_1, C_1 - x \notin \mathcal{D}_{(a)}$ 且 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}_{(a)}$, 则 $C_1$ 和 $C_2$ 是拟阵 $(E, \mathcal{D}_{(a)})$ 的两个圈, 又因为 $C_1 \neq C_2$ 且 $\exists e \in C_1 \cap C_2$, 则由(Q3)知, $C_1 \cup C_2 - e \in \mathcal{D}_{(a)}$. 则存在拟阵 $(E, \mathcal{D}_{(a)})$ 中的极小集 $C_3 \in \mathcal{D}_{(a)}$ 满足 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$ 且 $\forall x \in C_3, C_3 - x \notin \mathcal{D}_{(a)}$, 即 $a \in \beta(\mathcal{D}(C_3))$ 且 $\forall x \in C_3, a \notin \beta(\mathcal{D}(C_3 - x))$, 故 $C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 且 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

**(FBQ4)** 假设 $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in \beta(\top)$, 若存在 $C_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 则有 $\mathcal{D}(C_1) \leq \mathcal{D}(A)$, 故 $a \in \beta(\mathcal{D}(A))$, 即 $A \in \mathcal{D}_{(a)}$. 由定理 1.2.4 知, $\exists b \in \beta(\top)$ 且 $a \in \beta(b)$, 使得 $A \in \mathcal{D}_{(b)}$, 由拟阵性质可知; 存在极小集 $C_2 \in \mathcal{D}_{(b)}, C_2 \subseteq A$ 及 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}_{(b)}$, 故 $b \in \beta(\mathcal{D}(C_2))$ 且 $\forall x \in C_2, b \notin \beta(\mathcal{D}(C_2 - x))$. 所以 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{\beta}(b)$ 且

$C_2 \subseteq A$. □

**定理** 5.2.3. 设 $E$ 为非空有限集合, 且 $M$ 满足条件 (**BETA**). 映射 $\mathcal{Q}^{\beta}: \beta(\top) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件(**FBQ1**)-(**FBQ3**) 及(**FBQ4**), 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})$ 使得 $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}} = \mathcal{Q}^{\beta}$.

**证明** 令映射 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}: 2^E \to M$ 如下: $\forall A \in 2^E$,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}(A) = \bigvee \left\{ a \in \beta(\top) : \exists C \in \mathcal{Q}^{\beta}(a) \text{使得} C \subseteq A \right\}. \tag{5.2.2}$$

要想证明 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 由定理 3.1.3, 只需要证明

$$A \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})_{(a)} \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{Q}^{\beta}(a) \text{ 使得 } C \subseteq A.$$

令 $A \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})_{(a)}$, $\exists b \in \beta(\top)$ 使得 $a \in \beta(b)$, 且 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}^{\beta}(b)$ 使得 $C_1 \subseteq A$. 由(**FBQ4**)知, 存在 $C_2 \in \mathcal{Q}^{\beta}(a)$ 使得 $C_2 \subseteq A$. 上述证明过程可逆. 由定理 3.1.3 可知, 由 $\mathcal{Q}^{\beta}$ 可以导出一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})$.

下证 $\forall a \in \beta(\top)$, $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}}(a) = \mathcal{Q}^{\beta}(a)$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}}(a) &\Leftrightarrow a \in \beta(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}(A)) \text{且} \forall x \in A, a \notin \beta(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}(A - x)) \\ &\Leftrightarrow A \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})_{(a)} \text{且} \forall x \in A, A - x \notin (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})_{(a)} \end{aligned}$$

则可以推知 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}^{\beta}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 假设 $C_1 \subsetneq A$, 则存在 $x \in A - C_1$, 故 $C_1 \subseteq A - x$, 则 $A - x \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}})_{(a)}$ 矛盾, 假设不成立, 所以有 $C_1 = A$, 故 $A \in \mathcal{Q}^{\beta}(a)$. 反之也成立, 所以 $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}}}(a) = \mathcal{Q}^{\beta}(a)$. □

**定理** 5.2.4. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且 $M$ 满足条件 (**BETA**), $\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}$ 是 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $\beta$- 圈集族, 则

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\beta}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}.$$

**证明** $\forall A \in 2^E$, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}}(A) &= \bigvee \left\{a \in \beta(\top) : \exists C \in \mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}(a) \text{ 使得 } C \subseteq A\right\} \\
&\le \bigvee \left\{a \in \beta(\top) : \exists C \subseteq A, \text{ 使得 } a \in \beta(\mathcal{D}(C)) \subseteq \beta(\mathcal{D}(A))\right\} \\
&\le \bigvee \{a \in \beta(\top) : a \in \beta(\mathcal{D}(A))\} \\
&= \mathcal{D}(A)
\end{aligned}$$

又设 $a \in \beta(\mathcal{D}(A))$, 则 $A \in \mathcal{D}_{(a)}$, 存在 $b \in \beta(\top)$ 且 $a \in \beta(b)$ 使得 $A \in \mathcal{D}_{(b)}$. 故存在包含于 $A$ 内的极小圈 $C \subseteq A$ 满足 $C \in \mathcal{D}_{(b)}$ 且 $\forall x \in C, C - x \notin \mathcal{D}_{(b)}$, 故 $C \in \mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}(b) \Rightarrow C \subseteq A$. 所以 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}}(A) \ge b$, 有 $a \in \beta(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}}(A))$, 则 $\mathcal{D}(A) \le \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}}(A)$.

从而证明了 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^\beta_\mathcal{D}}(A)$. □

**定义** 5.2.5. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 称映射 $\mathcal{Q}^J_\mathcal{D} : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 圈集族, 定义如下: $\forall a \in J(M)$,

$$\mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(a) = \left\{A \in 2^E : \mathcal{D}(A) \ge a \text{ 且} \forall x \in A, \mathcal{D}(A - x) \not\ge a\right\}. \tag{5.2.3}$$

**定理** 5.2.6. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 映射 $\mathcal{Q}^J_\mathcal{D} : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 圈集族. 则 $\mathcal{Q}^J_\mathcal{D}$ 满足以下性质: $\forall a \in J(M)$ 及 $\forall A \in 2^E$,

**(FJQ1)** $\emptyset \notin \mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(a)$.

**(FJQ2)** 如果 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(a)$ 且 $C_1 \subseteq C_2$, 那么 $C_1 = C_2$.

**(FJQ3)** 如果 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(a), C_1 \ne C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 那么存在 $C_3 \in \mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(a)$ 使得 $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

**(FJQ4)** 若 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 当且仅当 $\forall b \in \beta^*(a)$ 存在 $C_2 \in \mathcal{Q}^J_\mathcal{D}(b)$ 使得 $C_2 \subseteq A$.

**证明** **(FJQ1)** $\forall a \in J(M)$, 由 $\mathcal{D}(\emptyset) = \perp$ 知, $\mathcal{D}(\emptyset) \not\geq a$, 故 $\emptyset \notin \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$.

**(FJQ2)** 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$ 且 $C_1 \subseteq C_2$, 则有 $\mathcal{D}(C_1) \geq a$ 且 $\mathcal{D}(C_2) \geq a$, 推知 $C_1, C_2 \in \mathcal{D}_{[a]}$. 则由拟阵的性质可知在 $(E, \mathcal{D}_{[a]})$ 中存在圈 $C$ 使得 $C \subseteq C_1 \subseteq C_2 \in \mathcal{D}_{[a]}$, 令 $C_1 \neq C_2$, 则存在 $x \in C_2 - C_1$ 有 $C \subseteq C_2 - x \in \mathcal{D}_{[a]}$. 即 $\exists x \in C_2$ 使得 $\mathcal{D}(C_2 - x) \geq a$ 与 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$ 矛盾. 故 $C_1 = C_2$.

**(FJQ3)** 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$, $C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 下证 $\exists C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$ 使得 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

实际上我们只需要证明 $\mathcal{D}(C_1 \cup C_2 - e) \geq a$. 由定义式**(4.2.3)**知, $C_1, C_2 \in \mathcal{D}_{[a]}$ 且 $\forall x \in C_1, C_1 - x \notin \mathcal{D}_{[a]}$ 及 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}_{[a]}$, 则 $C_1$ 和 $C_2$ 是拟阵 $(E, \mathcal{D}_{[a]})$ 的两个圈, 又因为 $C_1 \neq C_2$ 且 $\exists e \in C_1 \cap C_2$, 则由**(Q3)**知, $C_1 \cup C_2 - e \in \mathcal{D}_{[a]}$. 故存在拟阵 $(E, \mathcal{D}_{[a]})$ 中的极小集 $C_3 \in \mathcal{D}_{[a]}$ 满足 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$ 且 $\forall x \in C_3, C_3 - x \notin \mathcal{D}_{[a]}$, 即 $\mathcal{D}(C_3) \geq a$ 且 $\forall x \in C_3, \mathcal{D}(C_3 - x) \not\geq a$, 故 $C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$ 且 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

**(FJQ4)** 假设 $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in J(M)$, 若存在 $C_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 则有 $a \leq \mathcal{D}(C_1) \leq \mathcal{D}(A)$, 即 $A \in \mathcal{D}_{[a]}$. 由定理 1.2.4 中的 (3) 知, $\forall b \in \beta(a)$ 有 $A \in \mathcal{D}_{[b]}$, 由拟阵性质可知, 存在极小集 $C_2 \in \mathcal{D}_{[b]}, C_2 \subseteq A$ 且 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}_{[b]}$, 故 $\mathcal{D}(C_2) \geq b$ 且 $\forall x \in C_2, \mathcal{D}(C_2 - x) \not\geq b$. 所以 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^J(b)$ 且 $C_2 \subseteq A$. □

**定理** 5.2.7. 设 $E$ 为非空有限集合, 映射 $\mathcal{Q}^J : J(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件**(FJQ1)-(FJQ3)** 及**(FJQ4)**. 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J})$ 使得 $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J}}^J = \mathcal{Q}^J$.

**证明** 令映射 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J} : 2^E \to M$ 如下: $\forall A \in 2^E$,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J}(A) = \bigvee \left\{ a \in J(M) : \exists C \in \mathcal{Q}^J(a) \text{使得} C \subseteq A \right\}. \qquad (5.2.4)$$

要想证明 $(E,\mathcal{D}_{Q^J})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 由定理 2.1.2, 只需要证明

$$A \in (\mathcal{D}_{Q^J})_{[a]} \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{Q}^J(a) \text{ 使得 } C \subseteq A.$$

令 $A \in (\mathcal{D}_{Q^J})_{[a]}$, 则 $\forall b \in \beta(a)$, $\exists c \in J(M)$ 使得 $b \in \beta(c)$ 且存在 $C_1 \in \mathcal{Q}^J(c), C_1 \subseteq A$. 由**(FJQ4)**知, 存在 $C_2 \in \mathcal{Q}^J(a)$ 使得 $C_2 \subseteq A$. 上述证明过程可逆. 由定理 2.1.2 可知, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{D}_{Q^J})$.

下证 $\forall a \in J(M)$, $\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}_{Q^J}}(a) = \mathcal{Q}^J(a)$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}_{Q^J}}(a) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_{Q^J}(A) \geq a \text{且} \forall x \in A, \mathcal{D}_{Q^J}(A-x) \not\geq a \\ &\Leftrightarrow \quad A \in (\mathcal{D}_{Q^J})_{[a]} \text{且} \forall x \in A, A-x \notin (\mathcal{D}_{Q^J})_{[a]} \end{aligned}$$

则可以推知 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}^J(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 假设 $C_1 \subsetneq A$, 则存在 $x \in A - C_1$, 故 $C_1 \subseteq A - x$, 则 $A - x \in (\mathcal{D}_{Q^J})_{[a]}$ 矛盾, 假设不成立, 所以有 $C_1 = A$, 故 $A \in \mathcal{Q}^J(a)$. □

**定理** 5.2.8. 设 $(E,\mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}$ 是 $(E,\mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $J$- 圈集族, 则 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$ 有

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}}(A) \quad &= \quad \bigvee \left\{a \in J(M) : \exists C \in \mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}(a) \text{ 使得 } C \subseteq A\right\} \\ &\leq \quad \bigvee \left\{a \in J(M) : \exists C \subseteq A, \text{ 使得 } a \leq \mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(A)\right\} \\ &= \quad \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

又设 $\mathcal{D}(A) \geq a$, 则 $A \in \mathcal{D}_{[a]}$, $\forall b \in \beta(a)$ 有 $A \in \mathcal{D}_{[b]}$. 故存在包含于 $A$ 内的极小圈 $C \subseteq A$ 使得 $C \in \mathcal{D}_{[b]}$ 且 $\forall x \in C, C - x \notin \mathcal{D}_{[b]}$, 故 $C \in \mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}(b)$ 且 $C \subseteq A$. 所以 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}}(A) \geq b$, 有 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}}(A) \geq \bigvee\limits_{b \in \beta(a)} b = a$, 则 $\mathcal{D}(A) \leq \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}}(A)$.

从而证明了 $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^J_{\mathcal{D}}}(A)$. □

**定义** 5.2.9. 设 $(E,\mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 称映射 $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}:\alpha(\perp)\to 2^{(2^E)}$ 为 $(E,\mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 圈集族. $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}$ 定义如下: $\forall a\in\alpha(\perp)$,

$$\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)=\left\{A\in 2^E: a\notin\alpha(\mathcal{D}(A))\ 且 \forall x\in A, a\in\alpha(\mathcal{D}(A-x))\right\}. \tag{5.2.5}$$

**定理** 5.2.10. 设 $(E,\mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**). 且映射 $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}:\alpha(\perp)\to 2^{(2^E)}$ 是 $(E,\mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 圈集族. 则 $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}$ 满足以下性质: $\forall a\in\alpha(\perp)$ 及 $\forall A\in 2^E$,

(**FAQ1**) $\emptyset\notin\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$.

(**FAQ2**) 如果 $C_1,C_2\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 且 $C_1\subseteq C_2$, 那么 $C_1=C_2$.

(**FAQ3**) 如果 $C_2\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a), C_1\neq C_2, C_1$ 且存在 $e\in C_1\cap C_2$, 那么存在 $C_3\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 使得 $C_3\subseteq(C_1\cup C_2)-e$.

(**FAQ4**) 若 $\exists C_1\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 使得 $C_1\subseteq A$, 当且仅当对任意满足 $a\in\beta(b)$ 的 $b\in\alpha(\perp)$ 存在 $C_2\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(b)$ 使得 $C_2\subseteq A$.

**证明** (**FAQ1**) $\forall a\in\alpha(\perp)$, 由 $\mathcal{D}(\emptyset)=\perp$ 知, $a\in\alpha(\mathcal{D}(\emptyset))$, 故 $\emptyset\notin\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$.

(**FAQ2**) 设 $C_1,C_2\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 且 $C_1\subseteq C_2$, 则有 $a\notin\alpha(\mathcal{D}(C_1))$ 且 $a\notin\alpha(\mathcal{D}(C_2))$, 推知 $C_1,C_2\in\mathcal{D}^{[a]}$. 由拟阵的性质可知存在圈 $C$ 使得 $C\subseteq C_1\subseteq C_2\in\mathcal{D}^{[a]}$, 令 $C_1\neq C_2$, 则存在 $x\in C_2-C_1$ 有 $C\subseteq C_1\subseteq C_2-x\in\mathcal{D}^{[a]}$. 即 $\exists x\in C_2$ 使得 $a\notin\alpha(\mathcal{D}(C_2-x))$ 与 $C_2\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 矛盾. 故 $C_1=C_2$.

(**FAQ3**) 设 $C_1,C_2\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$, $C_1\neq C_2$ 且存在 $e\in C_1\cap C_2$, 下证 $\exists C_3\in\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 满足 $C_3\subseteq C_1\cup C_2-e$.

**实际上我们只需要证明** $a\notin\alpha(\mathcal{D}(C_1\cup C_2-e))$. 由式(**4.2.5**)知, $C_1,C_2\in\mathcal{D}^{[a]}$ 且 $\forall x\in C_1, C_1-x\notin\mathcal{D}^{[a]}$ 及 $\forall x\in C_2, C_2-x\notin\mathcal{D}^{[a]}$,

则 $C_1$ 和 $C_2$ 是拟阵 $(E,\mathcal{D}^{[a]})$ 的两个圈, 又因为 $C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 则由**(Q3)**知, $C_1 \cup C_2 - e \in \mathcal{D}^{[a]}$. 则存在拟阵 $(E,\mathcal{D}^{[a]})$ 中的极小圈 $C_3 \in \mathcal{D}^{[a]}$ 满足 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$ 且 $\forall x \in C_3, C_3 - x \notin \mathcal{D}^{[a]}$, 即 $a \notin \alpha(\mathcal{D}(C_3))$ 且 $\forall x \in C_3, a \in \alpha(\mathcal{D}(C_3 - x))$, 故 $C_3 \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 且 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

**(FAQ4)** 假设 $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in \alpha(\perp)$, 若存在 $C_1 \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 则有 $\mathcal{D}(C_1) \leq \mathcal{D}(A)$, 故 $a \notin \alpha(\mathcal{D}(A))$, 即 $A \in \mathcal{D}^{[a]}$. 由定理 1.2.4 中 (5) 知, 对任意满足 $a \in \alpha(b)$ 的 $b \in \alpha(\perp)$ 有 $A \in \mathcal{D}^{[b]}$, 由拟阵性质可知, 存在极小圈 $C_2 \in \mathcal{D}^{[b]}, C_2 \subseteq A$ 且 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}^{[b]}$, 故 $b \notin \alpha(\mathcal{D}(C_2))$ 且 $\forall x \in C_2, b \in \alpha(\mathcal{D}(C_2 - x))$. 所以 $C_2 \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}(b)$, 且 $C_2 \subseteq A$. □

**定理** 5.2.11. 设 $E$ 为非空有限集合, 映射 $\mathcal{Q}^{\alpha} : \alpha(\perp) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件**(FAQ1)**-**(FAQ3)** 及**(FAQ4)**. 且 $M$ 满足条件 **(ALPHA)**, 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})$ 使得 $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}} = \mathcal{Q}^{\alpha}$.

**证明** 令映射 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}} : 2^E \to M$ 如下: $\forall A \in 2^E$,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}(A) = \bigwedge \{a \in \alpha(\perp) : \forall C \in \mathcal{Q}^{\alpha}(a) \Rightarrow C \nsubseteq A\}. \tag{5.2.6}$$

要想证明 $(E,\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 由定理 2.1.6, 只需要证明

$$A \notin (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})^{[a]} \text{当且仅当} \forall C \in \mathcal{Q}^{\alpha}(a) \Rightarrow C \nsubseteq A.$$

$$\begin{aligned} A \notin (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})^{[a]} &\Leftrightarrow a \in \alpha(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}(a)) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \alpha(\perp) \text{ 使得 } a \in \alpha(b) \text{ 且 } \forall C \in \mathcal{Q}^{\alpha}(b) \Rightarrow C \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{Q}^{\alpha}(a) \Rightarrow C \nsubseteq A. \end{aligned}$$

由定理 3.1.3 可知, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E,\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})$.

下证 $\forall a \in \alpha(\perp)$, $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}}(a) = \mathcal{Q}^{\alpha}(a)$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}}(a) &\Leftrightarrow a \notin \alpha(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}(A))\text{且}\forall x \in A, a \in \alpha(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}}(A - x)) \\ &\Leftrightarrow A \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})^{[a]}\text{且}\forall x \in A, A - x \notin (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})^{[a]} \end{aligned}$$

则可以推知 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}^{\alpha}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 假设 $C_1 \subsetneq A$, 则存在 $x \in A - C_1$, 故 $C_1 \subseteq A - x$, 则 $A - x \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}})^{[a]}$ 矛盾, 假设不成立, 所以有 $C_1 = A$, 故 $A \in \mathcal{Q}^{\alpha}(a)$. □

**定理** 5.2.12. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $M$ 满足条件 (**ALPHA**), $\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}$ 是 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $\alpha$- 圈集族, 则 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$.

**证明** $\forall A \in 2^E$, 由于

$$\begin{aligned} a \in \alpha(\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}}(A)) &\Leftrightarrow \exists b \in \alpha(\perp) \text{ 使得} \\ &\quad\; a \in \alpha(b) \text{ 且 } \forall C \in \mathcal{Q}^{\alpha}(b) \Rightarrow C \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{Q}^{\alpha}(a) \Rightarrow C \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall C \in 2^E \text{ 满足 } a \notin \alpha(\mathcal{D}(C) \text{ 且} \\ &\quad\; \forall x \in C, a \in \alpha(\mathcal{D}(C - x)) \Rightarrow C \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow a \in \alpha(\mathcal{D}(A)). \end{aligned}$$

所以 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^{\alpha}_{\mathcal{D}}}(A)$. □

**定义** 5.2.13. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 称映射 $\mathcal{Q}^{P}_{\mathcal{D}} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 为 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 圈集族. $\mathcal{Q}^{P}_{\mathcal{D}}$ 定义如下: $\forall a \in P(M)$,

$$\mathcal{Q}^{P}_{\mathcal{D}}(a) = \left\{A \in 2^E : \mathcal{D}(A) \nleq a \text{ 且}\forall x \in A, \mathcal{D}(A - x) \leq a\right\}. \quad (5.2.7)$$

**定理** 5.2.14. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 且映射 $\mathcal{Q}^{P}_{\mathcal{D}} : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 是 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 圈集族. 则 $\mathcal{Q}^{P}_{\mathcal{D}}$ 满足以下性质. $\forall a \in P(M)$ 及 $\forall A \in 2^E$,

**(FPQ1)** $\emptyset \notin \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$.

**(FPQ2)** 如果 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 且 $C_1 \subseteq C_2$, 那么 $C_1 = C_2$.

**(FPQ3)** 如果 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a), C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 那么存在 $C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 使得 $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

**(FPQ4)** 若 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 当且仅当 $\exists b \in \alpha(a)$ 且存在 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(b)$ 使得 $C_2 \subseteq A$.

**证明** (FPQ1) $\forall a \in P(M)$, 由 $\mathcal{D}(\emptyset) = \perp$ 知, $\mathcal{D}(\emptyset) \leq a$, 故 $\emptyset \notin \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$.

**(FPQ2)** 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 且 $C_1 \subseteq C_2$, 则有 $\mathcal{D}(C_1) \not\leq a$ 且 $\mathcal{D}(C_2) \not\leq a$, 推知 $C_1, C_2 \in \mathcal{D}^{(a)}$. 则由拟阵的性质可知在 $(E, \mathcal{D}_{(a)})$ 中存在圈 $C$ 使得 $C \subseteq C_1 \subseteq C_2 \in \mathcal{D}^{(a)}$, 令 $C_1 \neq C_2$, 则存在 $x \in C_2 - C_1$ 有 $C \subseteq C_2 - x \in \mathcal{D}^{(a)}$. 即 $\exists x \in C_2$ 使得 $\mathcal{D}(C_2 - x) \not\leq a$ 与 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 矛盾. 故 $C_1 = C_2$.

**(FPQ3)** 设 $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$, $C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 下证 $\exists C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 使得 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

实际上我们只需要证明 $\mathcal{D}(C_1 \cup C_2 - e) \not\leq a$. 由式(4.2.7)知, $C_1, C_2 \in \mathcal{D}^{(a)}$ 且 $\forall x \in C_1, C_1 - x \notin \mathcal{D}^{(a)}$ 及 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}^{(a)}$, 则 $C_1$ 和 $C_2$ 是拟阵 $(E, \mathcal{D}^{(a)})$ 的两个圈, 又因为 $C_1 \neq C_2$ 且存在 $e \in C_1 \cap C_2$, 则由(Q3)知, $C_1 \cup C_2 - e \in \mathcal{D}^{(a)}$. 则存在拟阵 $(E, \mathcal{D}^{(a)})$ 中的极小集 $C_3 \in \mathcal{D}^{(a)}$ 满足 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$ 并且对于任意的 $x \in C_3, C_3 - x \notin \mathcal{D}^{(a)}$, 即 $\mathcal{D}(C_3) \not\leq a$ 且 $\forall x \in C_3, \mathcal{D}(C_3 - x) \leq a$, 故 $C_3 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 且 $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

**(FPQ4)** 假设 $\forall A \in 2^E$ 且 $\forall a \in P(M)$, 若存在 $C_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 则有 $\mathcal{D}(C_1) \leq \mathcal{D}(A)$, 故 $\mathcal{D}(A) \not\leq a$, 即 $A \in \mathcal{D}^{(a)}$. 由定理 1.2.4 中 (6) 知, $\exists b \in \alpha(a)$ 有 $A \in \mathcal{D}^{(b)}$, 由拟阵性质可知, 存在极小圈 $C_2 \in \mathcal{D}^{(b)}, C_2 \subseteq A$ 及 $\forall x \in C_2, C_2 - x \notin \mathcal{D}^{(b)}$, 故 $\mathcal{D}(C_2) \not\leq b$ 且 $\forall x \in C_2, \mathcal{D}(C_2 - x) \leq b$. 所以 $C_2 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}^{P}(b)$ 且 $C_2 \subseteq A$. □

**定理** 5.2.15. 设 $E$ 为非空有限集合, 映射 $\mathcal{Q}^P : P(M) \to 2^{(2^E)}$ 满足条件(**FPQ1**)-(**FPQ3**) 及(**FPQ4**). 则存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})$ 使得 $\mathcal{Q}^P_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P}} = \mathcal{Q}^P$.

**证明** 令映射 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P} : 2^E \to M$ 如下: $\forall A \in 2^E$,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P}(A) = \bigwedge \{a \in P(M) : \forall C \in \mathcal{Q}^P(a) \Rightarrow C \not\subseteq A\}. \tag{5.2.8}$$

要想证明 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, 由定理 2.1.2, 只需要证明

$$A \notin (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})^{(a)} \text{当且仅当} \forall C \in \mathcal{Q}^P(a) \Rightarrow C \subseteq A.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^\alpha_\mathcal{D}}(A) \le a \quad &\Leftrightarrow \quad \forall b \in \alpha(a), \exists c \in P(M) \text{ 使得 } b \in \alpha(c) \\
&\qquad \text{且 } \forall C \in \mathcal{Q}^\alpha(c) \Rightarrow C \not\subseteq A \\
&\Leftrightarrow \quad \forall b \in \alpha(a), \forall C \in \mathcal{Q}^\alpha(b) \Rightarrow C \not\subseteq A \\
&\Leftrightarrow \quad \forall C \in \mathcal{Q}^\alpha(a) \Rightarrow C \not\subseteq A \quad \text{由 } (\mathbf{FPQ4})
\end{aligned}$$

由定理 2.1.2 可知, 存在一个 $M$- 模糊化拟阵 $(E, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})$.
下证 $\forall a \in P(M)$, $\mathcal{Q}^P_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P}}(a) = \mathcal{Q}^P(a)$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{Q}^P_{\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P}}(a) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P}(A) \not\le a \text{且} \forall x \in A, \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P}(A - x) \le a \\
&\Leftrightarrow \quad A \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})^{(a)} \text{且} \forall x \in A, A - x \notin (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})^{(a)}
\end{aligned}$$

则可以推知 $\exists C_1 \in \mathcal{Q}^P(a)$ 使得 $C_1 \subseteq A$, 假设 $C_1 \subsetneq A$, 则存在 $x \in A - C_1$, 故 $C_1 \subseteq A - x$, 则 $A - x \in (\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P})^{(a)}$ 矛盾, 假设不成立, 所以有 $C_1 = A$, 故 $A \in \mathcal{Q}^P(a)$. □

**定理** 5.2.16. 设 $(E, \mathcal{D})$ 是一个 $M$- 模糊化拟阵, $\mathcal{Q}^P_\mathcal{D}$ 是 $(E, \mathcal{D})$ 上的 $M$- 模糊化 $P$- 圈集族, 则 $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P_\mathcal{D}} = \mathcal{D}$.

**证明** $\forall A\in 2^E$, 由于

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A) &= \bigwedge_{a\in P(M)}\left(a\vee\mathcal{D}^{(a)}(A)\right)\\
&= \bigwedge\left\{a\in P(M): A\notin\mathcal{D}^{(a)}\right\}\\
&= \bigwedge\{a\in P(M):\forall C\in 2^E\\
&\quad \text{满足 } \mathcal{D}(C)\nleq a \text{ 和} \forall x\in C, \mathcal{D}(C-x)\leq a \text{ 有 } C\nsubseteq A\Big\}\\
&= \bigwedge\left\{a\in P(M):\forall C\in\mathcal{Q}^P_{\mathcal{D}}(a)\ \text{,有 } C\nsubseteq A\right\}\\
&= \mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P_{\mathcal{D}}}(A),
\end{aligned}$$

从而证明了 $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}_{\mathcal{Q}^P_{\mathcal{D}}}(A)$. □

由上述内容可得结论：任意一个有限集合 $E$ 上的 $M$- 模糊化拟阵都存在唯一确定的 $M$- 模糊化 $\beta$- 圈集族 (或 $M$- 模糊化 $J$- 圈集族, $M$- 模糊化 $\alpha$- 圈集族, $M$- 模糊化 $P$- 圈集族) 与之对应, 它们分别都能与此 $M$- 模糊化拟阵相互诱导.

# 本课题的未来可行性工作

在本文的基础上, 还可以继续以下问题的研究.

1. 文中对每个 $M$- 模糊化拟阵理论的基本概念都是单独讨论的, 分别建立了这些基本概念和 $M$- 模糊化拟阵之间的一一对应关系, 关于各章之间的基本概念的关系没有在文中讨论, 所以可以将这一问题留作以后进一步讨论研究.

2. 文中所给出的 $M$- 模糊化拟阵理论的基本概念为进一步研究 $M$- 模糊化拟阵提供了有效工具, 在已经给出的 $M$- 模糊化闭包算子和 $M$- 模糊化闭集族的基础上可以讨论 $M$- 模糊化闭集格结构. 在 $M$- 模糊化基集族的基础上引入 $M$- 模糊化支撑集理论.

3. 在初步确立了 $M$- 模糊化拟阵理论的公理体系之后, 我们可以进一步引入 $M$- 模糊化拟阵理论中的 $M$- 模糊化幼阵及模糊化对偶拟阵, 不断地丰富 $M$- 模糊化拟阵理论.

4. 文中只针对史教授所提出的 $M$- 模糊化拟阵理论的内部结构展开讨论, 所以还可以在范畴论基础上讨论各种不同的模糊拟阵之间的关系.

5. 在引入这些 $M$- 模糊化拟阵理论中的基本概念基础上, 可以进一步研究 $M$- 模糊化算法, 为模糊优化中实际问题的解决寻找算法工具.

# 参考文献

[1] Abdukhalikov K. S., Tulenbaev M. S., Umirbaev U. U. On fuzzy bases of vector spaces[J], *Fuzzy sets and systems,* 1994, 63(2): 201–206.

[2] Bereg. S. Efficient algorithms for the d-dimensional rigidity matroid of sparse graphs[J], *Computational Geometry,* 2008, 40(1): 37–44.

[3] Betten D., Wenzel W. On linear spaces and matroids of arbitrary cardinality[J], *Algebra Univ.,* 2003, 49(3): 259–288.

[4] Birkhoff G. Abstract linear dependence in lattices[J], *Amer.J.Math.,* 1935, 57: 800–804.

[5] Birkhoff G. Lattice Theorey[M], New York: *American Mathematical Sociaty Colloquium Publications (4th ed.),* 1995.

[6] Blue M., Bush B., Puckett J. Unified approach to fuzzy graph problems[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 2002, 125(3): 355–368.

[7] Bonin J. E. Note: Extending a matroid by a cocircuit[J], *Discrete Mathematics,* 2006, 306(8-9): 812–819.

[8] Boulmakoul A. Fuzzy graphs modelling for HazMat telegeomonitoring[J], *European Journal of Operational Research,* 2006, 175(3): 1514–1525.

[9] Cameron P. J., Fon-Der-Flaass D. G. Bases for permutation Groups and Matroids[J], *Europ. J. Combinatorics,* 1995, 16(6): 537–544.

[10] Chan W. Note: An exchange property of matroid[J], *Discrete Mathematics,* 1995, 146(1-3): 299–302.

[11] Chuang T.-N., Kung J.-Y. A new algorithm for the discrete fuzzy shortest path problem in a network[J], *Applied Mathematics and Computation,* 2006, 174(1): 660–668.

[12] Dilworth R. P. Dependence relations in a semimodular lattice[J], *Duke Math. Journal,* 1944, 11(3): 575–587.

[13] Dress A. W. M. Duality theory for finite and infinite matroids with coefficients[J], *Advances in Mathematics,* 1986, 59(2): 97–123.

[14] Dress A. W. M., Wenzel W. Perfect matroids[J], *Advances in Mathematics,* 1992, 91(2): 158–208.

[15] Dress A. W. M., Wenzel W. Valuated matroids[J], *Advances in Mathematics,* 1992, 93(2): 214–250.

[16] Dwinger P. Characterizations of the complete homomorphic images of a completely distributive complete lattice I, *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 1982, 85: 403–414.

[17] Edmonds J. Matroids and the Greedy Algorithm[J], *Mathematical Programming*, 1971, 1(1): 127-136.

[18] Fortin J., Kasperski A., Zieliński P. Some methods for evaluating the optimality of elements in matroids with ill-known weights[J], *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160 (10) :1341–1354.

[19] Fujishige S., Koshevoy G. A., Sano Y. Matroids on convex geometries (cg-matroids)[J], *Discrete Mathematics*, 2007,307(15): 1936–1950.

[20] Gierz G. et al. A Compendium of Continuous Lattices[M], Berlin: *Springer Verlag*, 1980.

[21] Gierz G., et al. Continuous lattices and domains[M], Cambridge: *Cambridge University Press(2nd ed.)*, 2003.

[22] Gioan E., Vergnas M. L. Fully optimal Bases and the active bijection in graphs, Hyperplane arrangements, and oriented matroids[J], *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2007, 29: 365–371

[23] Grabisch M., Miranda P. On the vertices of the k-additive core[J], *Discrete Mathematics*, 2008, 308(22): 5204–5217.

[24] 郭建胜, 李生刚. 拟阵中算子的性质 [J], 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2007, 35(1): 13-16.

[25] Hachimori M., Kurata H., Sakuma T. Determining the minimum rank of matroids whose basis graph is common[J], *Electronic Notes in Discrete Mathematics,* 2008, 31: 137–142.

[26] Higuchi A. Lattices of closure operators[J], *Dis. Math.,* 1998, 179(1-3): 267–272.

[27] Hsueh Y.-C. On fuzzification of matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1993, 53(3): 319–327.

[28] Huang H.-L., Shi F.-G. $L$-fuzzy numbers and their properties[J], *Information Sciences,* 2008, 178(4): 1141–1151.

[29] Ingleton A. W. A note on independence functions and rank[J], *J. Comb. Theory,* 1973, 15: 51–68.

[30] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Fuzzy matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1988, 27(3): 291–302.

[31] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Bases of fuzzy matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1989, 31(2): 253–261.

[32] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Fuzzy circuits[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1989, 32(1): 35–43.

[33] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Fuzzy matroid and a greedy algorithm[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1990, 37(2): 201–213.

[34] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Fuzzy matroid structures[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1991, 41(3): 343–357.

[35] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Fuzzy rank functions[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1991, 42(2): 245–258.

[36] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Spanning properties for fuzzy matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1992, 51(3): 313–321.

[37] Jr. R. Goetschel, Voxman W. Fuzzy matroid sums and a greedy algorithm[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1992, 52(2): 189–200.

[38] Kalhoff F. Matroids with coefficients over projective planes[J], *Journal of Combinatorial Theory, Series A,* 1994, 68(1): 53–85.

[39] Kasperski A., Zieliński P. On combinatorial optimization problems on matroids with uncertain weights[J], *European Journal of Operational Research,* 2007, 177(2): 851–864.

[40] Kasperski A., Kulej M. Choosing robust solutions in discrete optimization problems with fuzzy costs[J], *Fuzzy Sets and Systems (In Press),* Available online 26 September 2008.

[41] Klein C. M. Fuzzy shortest paths[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1991, 39(1): 27–41.

[42] Kumar R. Fuzzy vector spaces and fuzzy cosets[J], *Fuzzy sets and systems,* 1992, 45(1): 109–116.

[43] 赖虹建, 拟阵论 [M], 北京：高等教育出版社, 2002.

[44] 李传东, 吴德垠. 模糊拟阵的对偶及超平面 [J], 重庆大学学报 (自然科学版), 2002, 25(4):116–119.

[45] Li S.-G., Xin X., Li Y.-L. Closure axioms for a class of fuzzy matroids and co-towers of matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 2007, 158(11): 1246–1257.

[46] 李永红, 吴德垠, 张贤敏. 闭模糊拟阵模糊圈的充要条件 [J], 重庆大学学报（自然科学版）, 2007, 30(6): 137–139, 154.

[47] 李永红, 杨春德, 吴德垠. 闭模糊拟阵模糊圈的算法研究 [J], 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 155–160.

[48] 刘妮. 拟阵理论的范畴特征 [D]. 西安: 陕西师范大学, 2005.

[49] Lowen R. Convex fuzzy sets[J], *Fuzzy sets and systems,* 1980, 3(3): 291–310.

[50] Maclane S. Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry[J], *Amer. J. Math.,* 1936, 58: 236–240.

[51] Maclane S. A lattice formulation for transcendence degrees and p-bases[J], *Duke Math. Journal,* 1938, 4(3): 455–468.

[52] Maffioli F., Zagaglia Salvi N. On some properties of base-matroids[J], *Discrete Applied Mathematics,* 2006, 154(9): 1401–1407.

[53] Malik D. S., Mordeson J. N. Fuzzy vector spaces[J], *Information sciences,* 1991, 55(1-3): 271–281.

[54] Mighton J. A new characterization of graphic matroids[J], *Journal of Combinatorial Theory, Series B,* 2008, 98(6): 1253–1258.

[55] Moazeni S. Fuzzy shortest path problem with finite fuzzy quantities[J], *Applied Mathematics and Computation,* 2006, 183(1): 160–169.

[56] Mordeson J. N. Bases of fuzzy vector spaces[J], *Information sciences,* 1993, 67(1-2): 87–92.

[57] Novak L. A. A comment on "Bases of fuzzy matroids" Fuzzy Sets and Systems 31 (1989) 253-261[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1997, 87(2): 251–252.

[58] Novak L. A. On fuzzy independence set systems[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1997, 91(3): 365–374.

[59] Novak L. A. On Goetschel and Voxman fuzzy matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 2001, 117(3): 407–412.

[60] Oxley J.-G. Matroid theorey[M], New York: *Oxford University Press,* 1992.

[61] Oxley J., Semple C., Whittle G. The structure of the 3-separations of 3-connected matroids II[J], *European Journal of Combinatorics,* 2007, 28(4): 1239–1261.

[62] Recski A. Maps of matroids with applications[J], *Discrete Mathematics,* 2005, 303(1-3): 175–185.

[63] Shi F.-G. Theory of $L_\beta$-nested sets and $L_\alpha$-nested sets and its applications[J], *Fuzzy Systems and Mathematics,* 1995, 9(4): 65–72 (in Chinese).

[64] Shi F.-G. L-fuzzy sets and prime element nested sets[J], *J. Mathematical Research and Exposition,* 1996, 16(3): 398–402 (in Chinese).

[65] Shi F.-G. Theory of molecular nested sets and its applications[J], *J. Yantai Teachers University (Natural Science),* 1996, 12(1): 33–36 (in Chinese).

[66] Shi F.-G. A new approach to the fuzzification of matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 2009, 160(5): 696–705.

[67] Shi F.-G. $(L, M)$-fuzzy matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 2009, 160(16): 2387–2400.

[68] Stell J., Webster J. Oriented matroids as a foundation for space in GIS[J], *Computers Environment and Urban Systems,* 2007, 31(4): 379–392.

[69] Tada M., et al. Fuzzy sharing problem[J], *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 33(3): 303–313.

[70] Tutte W. T. Separation of vertices by a circuit[J], *Discrete Mathematics*, 1975, 12(2): 173–184.

[71] Wagowski M. Coordinatization of B-matroids[J], *Discrete Mathematics*, 1993, 111(1-3): 465–479.

[72] Walendziak A. Consistent lattices and Steinitz spaces [J], *Algebra Univ.*, 1997, 38(14): 450–452.

[73] Walendiziak A. On characterizations of atomistic lattices [J], *Algebra Univ.*, 2000, 43(1): 31–39.

[74] 王国俊, L-fuzzy 拓扑空间论 [M], 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.

[75] 王国俊, - 极小集理论和应用 [J], 科学通报, 1986 , 31 (14): 511–516.

[76] Welsh D. J. A. Matroid Theory[M], London: *Academic Press*, 1982.

[77] Wang L., Shi F.-G. Characterization of *L*-fuzzifying Matroids by *L*-fuzzifying Closure Operators[J]. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Ref. No.: 411/08.

[78] Wenzel W. A Unified Treatment of the Geometric Algebra of Matroids and Even Δ-Matroids[J], *Advances in Applied Mathematics*, 1999, 22(4): 413–453.

[79] White N. Matroid applications[M], Cambridge: *Cambridge University Press,* 1992.

[80] Whiteney H. On the abstract properties of linear dependence[J], *Amer. J.Math.,* 1935, 7: 509–533.

[81] Wille U. On extending closure systems to matroids[J], *Europ. J. Combinatorics,* 2002, 23(1): 131–139.

[82] 吴德垠. 模糊图拟阵 [J], 重庆大学学报（自然科学版）, 1996, 19(4): 44–48.

[83] 吴德垠. 准模糊图拟阵 [J], 重庆大学学报（自然科学版）, 1996, (5): 100–109.

[84] 吴德垠, 李传东. 模糊拟阵中模糊闭包算子的特征 [J], 重庆大学学报 (自然科学版), 2002, 25(1):130–133.

[85] 吴德垠, 李永红, 余磊, 李斌. 闭模糊拟阵模糊基的判定 [J], 模糊系统与数学, 2006, 20(5): 54–58.

[86] Yao W., Shi F.-G. Basis axioms and circuits axioms for fuzzifying matroids[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 2008, **(Submitted)**.

[87] Ying M.-S. A new approach for fuzzy topology( I )[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1991, 39(3): 303–321.

[88] Ying M.-S. A new approach for fuzzy topology( II )[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1992, 47(2): 221–232.

[89] Ying M.-S. A new approach for fuzzy topology(Ⅲ)[J], *Fuzzy Sets and Systems,* 1993, 55(2): 193–207.

[90] Zadeh L. A. Fuzzy sets[J], *Information and Control,* 1965, 8: 338–353.

[91] Zhang G.-Q. Logic, semantics and computer science: some fundamental ideas[J], 数学进展, 2002, 31(5): 389–402.

[92] Zhao D. Generalizations of Continuous Lattices and Frames[D], *University of Cambridge,* Cambridge, 1992.

[93] 郑崇友, 樊磊, 崔宏斌, Frame 与连续格 [M], 北京：首都师范大学出版社 (2nd ed. ), 2002.

[General Information]
书名=M—模糊化拟阵的公理体系初步
作者=王岚著；史福贵顾问指导
页数=145
SS号=13172641
DX号=
出版日期=2009.12
出版社=黑龙江人民出版社